



Aalborg Universitet

AALBORG UNIVERSITY  
DENMARK

## Regulering og simulering

Steen-Thøde, Mogens

*Publication date:*  
1998

*Document Version*  
Også kaldet Forlagets PDF

[Link to publication from Aalborg University](#)

*Citation for published version (APA):*  
Steen-Thøde, M. (1998). *Regulering og simulering*. Institut for Bygningsteknik, Aalborg Universitet. Gul serie Bind U9809 Nr. 42

### General rights

Copyright and moral rights for the publications made accessible in the public portal are retained by the authors and/or other copyright owners and it is a condition of accessing publications that users recognise and abide by the legal requirements associated with these rights.

- ? Users may download and print one copy of any publication from the public portal for the purpose of private study or research.
- ? You may not further distribute the material or use it for any profit-making activity or commercial gain
- ? You may freely distribute the URL identifying the publication in the public portal ?

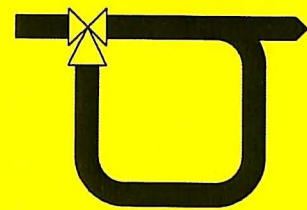
### Take down policy

If you believe that this document breaches copyright please contact us at [vbn@aub.aau.dk](mailto:vbn@aub.aau.dk) providing details, and we will remove access to the work immediately and investigate your claim.

# Regulering og simulering

Regulering og simulering

*Mogens Steen-Thøde*



Undervisningsnotat til grundlæggende reguleringsteori og simulering af  
dynamiske systemer inden for varme- og klimateknik

ISSN 1395-8232 U9809





# Regulering og simulering

*Mogens Steen-Thøde*

Undervisningsnotat til grundlæggende reguleringsteori og simulering af  
dynamiske systemer inden for varme- og klimateknik  
Trykt på Aalborg Universitet

# Indhold

INDHOLD.....	I
FORORD .....	III
KAPITEL 1 INTRODUKTION.....	1
1.1 REGULERING AF VARMEFLADE .....	1
1.2 VARMEFLADE OG VENTIL .....	2
1.2.1 Varmefladens dimensionering.....	2
1.2.2 Varmefladens dimensionering og statiske karakteristikker .....	2
1.2.3 Styreorgan – reguleringsventil.....	3
1.2.4 Dynamik .....	4
1.3 REGULERINGSUDSTYRETS EGENSKABER .....	6
1.3.1 Føleren .....	6
1.3.2 Regulatoren .....	7
1.3.3 P-styring.....	8
1.4 REGULERINGSUDSTYRETS VIRKEMÅDE .....	9
1.4.1 Stationære forhold.....	9
1.4.2 Dynamisk forløb .....	10
KAPITEL 2 DYNAMISKE MODELLER OG SIMULERING .....	15
2.1 DYNAMISKE MODELLER .....	15
2.2 FØRSTE ORDENS SYSTEMER .....	16
2.2.1 Modellering af temperaturføler .....	16
2.2.2 Rummodel.....	19
2.2.3 Sammenkobling af to 1. ordens systemer .....	20
2.2.4 Sammenfatning.....	21
2.3 LAPLACETRANSFORMATION .....	22
2.3.1 Regneregler for Laplacetransformation.....	22
2.4 LØSNING AF DIFFERENTIALLIGNINGER VED LAPLACETRANSFORMATION .....	26
2.4.1 Løsning af 1. ordens differentialligning .....	26
2.4.2 Sammenfatning.....	29
2.5 TILBAGETRANSFORMATION. PARTIALBRØKUDVIKLING .....	30
2.5.1 Partialbrøkudvikling .....	30
2.6 NUMERISK LØSNING .....	33
2.6.1 Numerisk løsning af 1. ordens differentialligning .....	33
2.6.2 Løsning af højere ordens differentialligning.....	34
KAPITEL 3 REGULERINGSKREDSSEN.....	36
3.1 OVERFØRINGSFUNKTIONER .....	36
3.1.1 Reguleringsobjektet.....	36
3.1.2 Overføringsfunktioner, blokke og blokdiagrammer .....	38
3.1.3 Styreorgan – reguleringsventil.....	40
3.1.4 Regulatoren.....	40
3.2 DEN LUKKEDE SLØJFE .....	41
3.2.1 Reguleringskredsen .....	41
3.2.2 Reguleringsystemets virkning .....	43
3.3 SYSTEMER AF 2. ORDEN .....	46
3.3.1 Måleelement i tilbageføringen .....	46
3.3.2 Det generelle 2. ordens system.....	48
KAPITEL 4 REGULERINGSYSTEMETS EGENSKABER.....	52
4.1 REGULERINGSKREDSSENS ELEMENTER .....	52
4.1.1 Reguleringsystemets blokdiagram .....	52
4.1.2 Reguleringsobjektets overføringsfunktioner.....	53
4.1.3 Måleudstyret.....	55



4.1.4 Styringsudstyret.....	55
4.2 REGULERINGSKREDSSENS VIRKNING.....	57
4.2.1 Den lukkede sløjfes indsvingningsforløb.....	57
4.3 FREKVENSANALYSE.....	62
4.3.1 Overføringsfunktioners sinusrespons.....	62
4.3.2 Frekvenskarakteristikker.....	64
<b>KAPITEL 5 REGULERINGSKREDSSENS STABILITET.....</b>	<b>72</b>
5.1 STABILITETSUNDERSØGELSE.....	72
5.1.1 Nyquist's stabilitetskriterium.....	72
5.1.2 Forstærknings- og fasemargin.....	75
5.2 DEN LUKKETE SLØJFES FREKVENSKARAKTERISTIKKER.....	79
5.2.1 Bodediagram for lukketsløjfen.....	79
5.3 REGULERINGSNØJAGTIGHED OG REGULATORINDSTILLING.....	84
5.3.1 Reguleringsnøjagtighed.....	85
5.3.2 Reguleringsystemer med forenklet dynamik.....	86
5.3.3 Empiriske regler for indstilling af regulatorparametre.....	89
5.4 OPBYGNING AF REGULERINGSYSTEMER.....	91
5.4.1 Kobling til modvirkning af forstyrrelser.....	92
5.4.2 Forregulering af forstyrrelser – kaskaderegulering.....	93
5.4.3 Sammenfatning.....	94
<b>APPENDIKS.....</b>	<b>96</b>
A1 MATLAB M-FILER.....	96
A1.1 Partialbrøkdudvikling.....	96
A1.2 Ombytning mellem overføringsfunktion og tilstandsbeskrivelse.....	97
A1.3 Simulering.....	97
A1.4 Frekvensanalyse.....	98
A2 KOMPLEKSE TAL.....	100
A2.1 Det komplekse tals repræsentation.....	100
A2.2 Polynomier med komplekse rødder.....	101

# Forord

Dette notat er primært udarbejdet til brug i undervisningen i kurset Energisystemer og Regulering på civilingeniørlinien Indeklima og Energiøkonomi på Aalborg Universitet, hvilket naturligvis sætter sit spor både i omfang og udvælgelse af emner. Hensigten er at give en introduktion til det teoretiske grundlag for reguleringsteknikken samtidig med en indføring i simulering af dynamiske systemer, således at læseren får en rimelig forståelse af dynamiske systemers virkemåde og karakteristika.

Det er ikke uden betænkelighed, at jeg kaster mig ud i et sådant projekt, idet der findes en mangfoldighed af fremragende lærebøger inden for disse emner. Men desværre er der ikke mange af disse, der tager direkte sigte mod det varme- og klimatekniske område, hvilket bevirker at de fleste eksempler, der indgår i disse bøger, er hentet fra det elektriske eller maskintekniske område og de er derfor måske ikke så let forståelige for en læser med bygnings- og klimateknisk baggrund. Selv om der i dette notat ikke indgår en egentlig beskrivelse af varme- og klimatekniske komponenters dynamik, hvilket er for omfattende i forbindelse med en gennemgang af den grundlæggende teori, er det mit håb at de eksempler, der er medtaget, er umiddelbart forståelige, og med lidt abstraktion kan overføres til andre energitekniske systemer.

Ved dispositionen af det medtagne stof, har jeg valgt i kapitel 1 at give en meget overordnet indføring i reguleringssystemets opbygning og den terminologi der anvendes, samtidig med at dette knyttes til kendte forhold fra ventilationsteknikken.

Kapitel 2, der omhandler opstilling af matematiske modeller for dynamiske systemer og deres simulering, er helt grundlæggende for opstillingen af de bestemmende differentialligninger, der er nødvendige for at beskrive et hvilket som helst lineært system under dynamisk påvirkning, og her gives også nogle af de metoder der anvendes til løsning af differentialligninger. Af hensyn til en rationel beskrivelse af reguleringssystemers dynamiske egenskaber er det valgt, at dette sker gennem opstilling af overføringsfunktioner, hvorfor kendskab til Laplacetransformation er nødvendig, og derfor er de vigtigste regneregler og eksempler på metodens til anvendelse samlet i kapitel 2. Dette gælder også grundlaget for numeriske løsningsmetoder, der i øvrigt anvendes i de fleste eksempler i de efterfølgende kapitler, hvor løsningerne direkte er angivet ved en beregningsgang, der kan anvendes i programmet MATLAB.

Kapitlerne 3 og 4 omfatter den egentlige beskrivelse af reguleringssystemer, først knyttet til et konkret eksempel og derefter mere alment, hvor systemets opbygning og reaktion på forskellige påvirkninger beskrives. Endelig afsluttes i kapitel 5 med en vurdering af reguleringssystemets stabilitet baseret på en traditionel frekvensanalyse.

Som nævnt indledningsvis er målet at give et teoretisk grundlag til forståelse af dynamiske systemer, og derfor indeholder dette notat ingen beskrivelser af de mange forskellige muligheder for anlægsopbygninger inden for varme- og klimateknikken eller af de fysiske komponenter der indgår i reguleringssystemerne. Oplysninger om disse forhold må søges i firmakataloger eller andre lærebøger.

Mogens Steen-Thøde

November 1998

# Kapitel 1 INTRODUKTION

## Introduktion til reguleringsteknikken

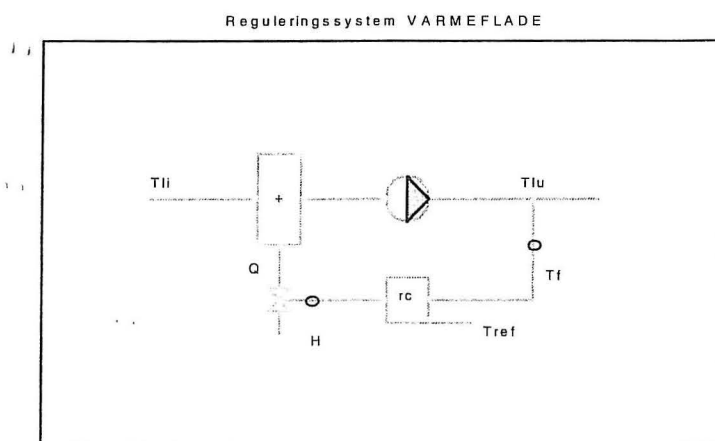
### Grundbegreber og definitioner

## 1.1 Regulering af varmeblade

Dette kapitel giver en kort indføring i nogle grundlæggende reguleringstekniske principper, idet der arbejdes med et gennemgående eksempel knyttet til regulering af lufttemperaturen efter en varmeblade.

Af hensyn til eksemplets overskuelighed er der foretaget en række forenklinger i beskrivelsen af vandvarmeblade og ventil. Disse forhold vendes der tilbage til senere, idet det faktisk er ventilationsingeniørens fornemste opgave at udforme og dimensionere systemet således, at det bedst muligt følger den beskrivelse der anvendes i eksemplet.

Lad os se på det system der skal arbejdes med:



Der er således tale om et helt simpelt ventilationsanlæg, der er udformet med henblik på at opretholde en fast indblæsningstemperatur.

På figuren ses dels varmebladen (og ventilatoren) og dels det reguleringsudstyr, der skal til for at kunne ændre varmebladens varmeafgivelse og dermed give mulighed for at fastholde den ønskede indblæsningstemperatur når fx luftens temperatur før varmebladen ændre sig.

REGULERINGSUDSTYRET består af følgende hoveddele:

Regulatoren (STYRINGSUDSTYRET) 'rc' hvor bl.a. den ønskede indblæsningstemperatur ( $T_{ref}$ ) = REFERENCEVÆRDIEN kan indstilles.

STYREORGANET som i dette tilfælde er en reguleringsventil, og FØLEREN/MÅLEUDSTYRET der måler den REGULEREDE STØRRELSE, som her er indblæsningstemperaturen ( $T_{lu}$ ).



## 1.2 Varmeflade og ventil

Komponenterne, i det anlæg der nu skal reguleres, er udvalgt og dimensioneret til at imødegå de funktionskrav der stilles til anlægget. Dette anlægs centrale komponenter i reguleringsmæssig henseende er varmefladen og ventilen, hvor ventilen sammenknytter det lufttekniske anlæg med reguleringsystemet.

### 1.2.1 Varmefladens dimensionering

Varmefladen er dimensioneret ud fra en række ventilationstekniske forudsætninger, således at den kan give den ønskede luftstrøm ( $m_L$ ) den ønskede temperaturstigning  $\Delta T_{lmax} = (T_{lu} - T_{li})_{dim}$ .

Den effekt der skal tilføres varmefladen i dimensioneringstilstanden, er således:

$$Q_{dim} = m_L \cdot c_L \cdot \Delta T_{lmax} \text{ eller}$$

$$Q_{dim} = B_l \cdot (T_{lu} - T_{li})_{dim}$$

I dette tilfælde antages  $(T_{lu} - T_{li})_{dim} = (20 - (-10)) = 30 \text{ }^\circ\text{C}$ .

### 1.2.2 Varmefladens dimensionering og statiske karakteristikker

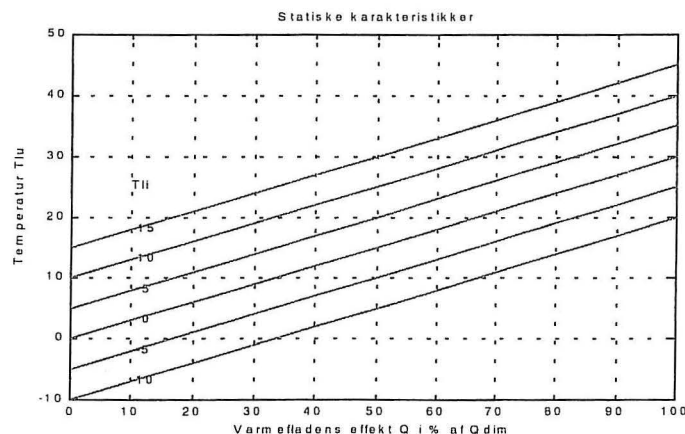
Ved den almindelige drift af ventilationsanlægget vil luftens opvarmning afhænge af den effekt der tilføres varmefladen, og denne vil kun undtagelsesvis være lig den dimensionsgivende.

En STATIONÆR varmebalance for luften gennem varmefladen giver:

$$B_l \cdot (T_{lu} - T_{li}) = Q \text{ eller}$$

$$T_{lu} = T_{li} + Q/B_l$$

Dette udtryk viser, at luftens afgangstemperatur ( $T_{lu}$ ) afhænger dels af luftens tilgangstemperatur ( $T_{li}$ ) og dels af den tilførte effekt ( $Q$ ). Optegnes dette udtryk for  $0 \leq Q \leq Q_{dim}$  fås et sæt STATIONÆRE KARAKTERISTIKKER for luftens opvarmning i varmefladen:



De statiske karakteristikker ( $T_{lu} = T_{li} + Q/B_l$ ) giver anledning til definition af nogle vigtige regulerings tekniske parametre:

### STATISK FORSTÆRKNING

$$dT_{lu}/dT_{li} = 1$$

$$dT_{lu}/dQ = 1/B_l$$

Statisk forstærkning er hældningskoefficienter til de statiske karakteristikker, og de udtrykker, hvor meget lufttemperaturen ( $T_{lu}$ ) efter varmefladen vil ændre sig pr. enheds ændring i hhv luftens tilgangstemperatur ( $T_{li}$ ) eller den tilførte effekt ( $Q$ ).

Når luftstrømmen gennem varmefladen er konstant (og dermed  $B_l = \text{konst.}$ ), er de statiske forstærkninger konstante, og de statiske karakteristikker er rette linier.

### REGULERINGSOMRÅDET

Da varmefladens varmeafgivelse er begrænset  $0 \leq Q \leq Q_{\text{dim}}$ , er der også en grænse for variationsområdet for lufttemperaturen efter varmefladen:

$$\Delta T_{\text{lumax}} = Q_{\text{dim}}/B_l \quad (= 30 \text{ °K i dette tilfælde}).$$

Dette kaldes (indblæsningstemperaturens) REGULERINGSOMRÅDE.

## 1.2.3 Styreorgan – reguleringsventil

Varmeafgivelsen fra varmefladen skal kunne ændres, og dette sker gennem en reguleringsventil.

Vi vil her forudsætte, at der er et lineært sammenhæng mellem effekt ( $Q$ ) og ventilstilling ( $H$ ), således at den statiske karakteristik kan beskrives ved:

$$Q = K_v \cdot H \quad 0 \leq H \leq 1$$

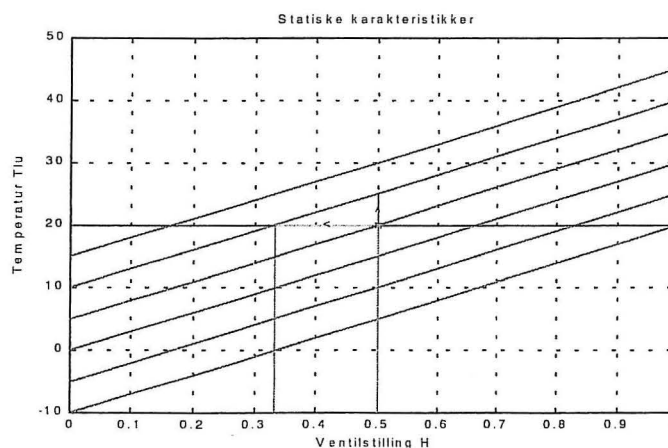
$K_v = Q_{\text{dim}}$  er ventilens statiske forstærkning.

Indsættes dette i udtrykket for varmefladens karakteristik ( $T_{lu} = T_{li} + Q/B_l$ ) fås:

$$T_{lu} = T_{li} + Q_{\text{dim}} \cdot (1/B_l) \cdot H = T_{li} + \Delta T_{\text{lumax}} \cdot H$$

Den statiske forstærkning  $dT_{lu}/dH = \Delta T_{\text{lumax}} = Q_{\text{dim}} \cdot (1/B_l)$  er produktet af to statiske forstærkninger, nemlig for ventilen  $dQ/dH = Q_{\text{dim}}$  og for varmefladen  $dT_{lu}/dQ = 1/B_l$ .

Varmefladens statiske karakteristik som funktion af ventilstillingen ses på den følgende figur, der samtidig viser behovet for regulering af systemet hvis der ønskes en fastholdelse af indblæsningstemperaturen, når luftens tilgangstemperatur ændres:



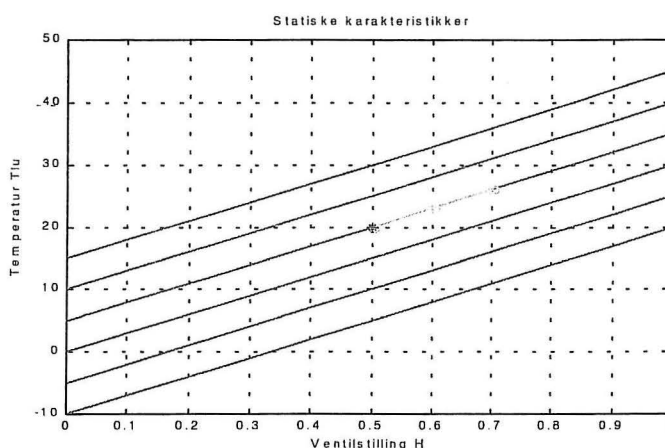
### 1.2.4 Dynamik

De statiske karakteristikker for varmeblæsen fortæller, hvordan lufttemperaturen efter varmeblæsen går fra en stationær tilstand til en ny stationær tilstand ved en ændring af ventilstillingen eller af luftens tilgangstemperatur, men de fortæller ikke noget om det TIDSMÆSSIGE forløb af disse ændringer.

Overalt, hvor der sker ændringer i et termisk system vil varmeakkumulerings-effekten gøre sig gældende, hvilket betyder at det er nødvendigt, at kunne beskrive komponenternes dynamiske virkemåde, for at kunne analysere systemets driftsforhold under normale (ikke stationære) driftsbetingelser.

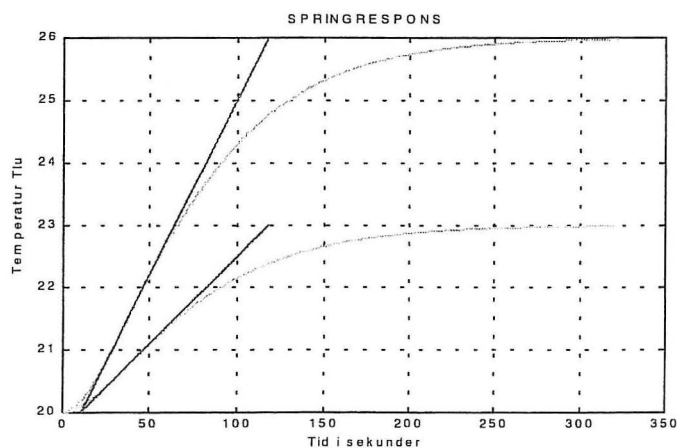
For at belyse de dynamiske forhold for varmeblæsen vil vi se hvad der sker, hvis ventilstillingen momentant øges hhv 10 og 20 % ud fra en stationær driftstilstand, hvor ventilen har stået 50 % åben ved en tilgangstemperatur på  $T_{li} = 5^\circ\text{C}$ , der har givet  $T_{lu} = 20^\circ\text{C}$ .

Vi ser først på disse ændringer i den statiske karakteristik:



Vi ser, at indblæsningstemperaturen  $T_{lu}$  vil stige hhv 3 og 6  $^\circ\text{C}$  når ventilåbningen øges hhv 10 og 20 %.

Og nu det dynamiske indsvingningsforløb:



Indsvingningsforløbet viser en S-kurve, der er karakteristisk for mange termiske komponenter (systemer der kan beskrives ved en anden eller højere ordens differentialligning).

De indlagte vendetangenter viser, at indsvingningsforløbet tidsmæssigt kan inddeles i tre faser:

- 1) det første stykke, hvor systemet reagerer meget 'trægt' - **DØDTID**



2) det næste stykke, hvor næsten hele ændringen sker - **STIGETID**

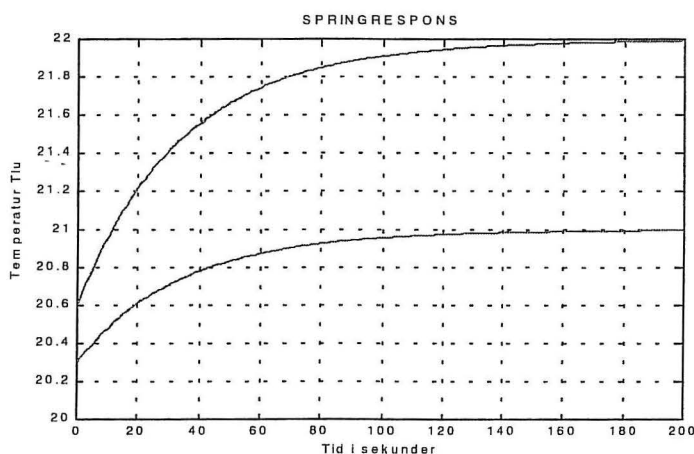
3) og endelig det sidste lange stykke inden der opnås en ny stationær slutværdi. Som ventet stiger  $T_{lu}$  hhv 3 og 6 °C.

Bemærk, at dødtid og stigetid er ens for de to indsvingningsforløb.

Vi vil nu se, hvordan indsvingningsforløbet for lufttemperaturen efter varmeblæsen ser ud, hvis tilgangstemperaturen ( $T_{li}$ ) momentant ændres hhv 1 og 2 °C mens ventilens stilling fastholdes.

Med kendskab til den statiske karakteristik ( $T_{lu} = T_{li} + \Delta T_{lmax} \cdot H$ ) ved vi, at  $T_{lu}$  vil få en stigning på hhv 1 og 2 °C.

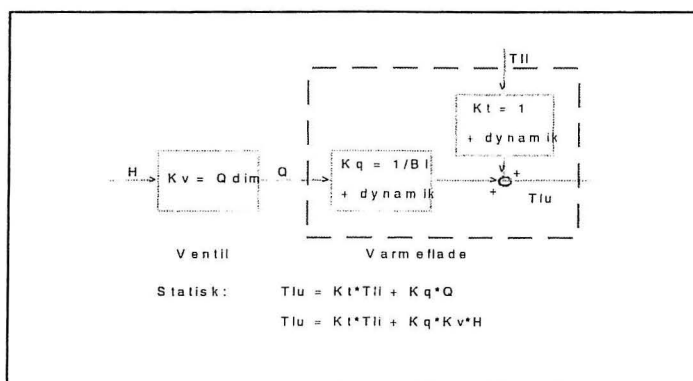
Det dynamiske indsvingningsforløb (spring-responsen) bliver



Indblæsningstemperaturen forløber noget anderledes end før, idet der momentant sker en lille stigning efterfulgt af et stykke, hvor varmeakkumuleringen i varmeblæsen gør sig gældende. Den endelige ændring af  $T_{lu}$  er som ventet hhv 1 og 2 °C.

Hermed er den indledende undersøgelse af varmeblædens statiske og dynamiske egenskaber afsluttet. Vi sammenfatter, på symbolsk vis, de oplysninger vi har fået om de enkelte komponenter, i BLOKKE (OVERFØRINGSFUNKTIONER), der angiver sammenhængen mellem en indgangsstørrelse (den uafhængige variable) og en eller flere udgangs-størrelser (afhængige variable).

Blokkene for ventil og varmeblæde er vist på følgende figur:



## 1.3 Reguleringsudstyrets egenskaber

Reguleringsudstyret er en fælles betegnelse for føler, måleudstyr, referenceudstyr og styringsudstyr, hvor de tre sidstnævnte funktioner normalt er sammenbygget i en fysisk enhed der kaldes regulatoren. Regulatoren skal kontrollere den regulerede størrelse og efter behov gribe ind i REGULERINGSOBJEKTET (varmefflade+ventil).

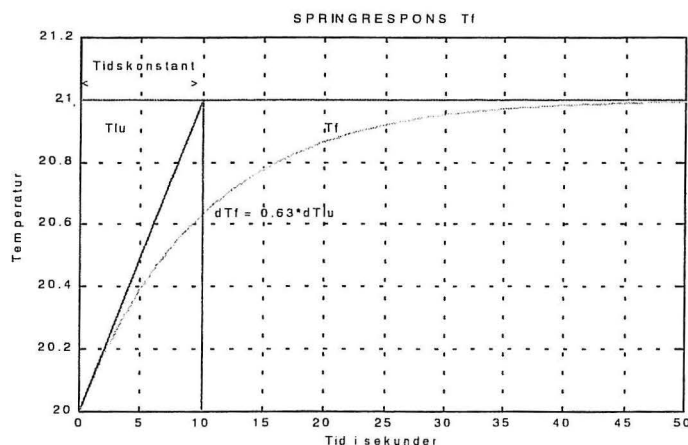
### 1.3.1 Føleren

Når der skal foretages en regulering, er det nødvendigt at skaffe kendskab til den regulerede størrelses øjeblikkelige værdi, hvilket sker gennem føleren (og måleudstyret). I dette eksempel skal der anvendes en føler, der placeres i ventilationskanalen efter varmeffladen. Ventilationsluftens temperatur på det sted hvor føleren er placeret, er pr definition den regulerede størrelse ( $T_{lu}$ ).

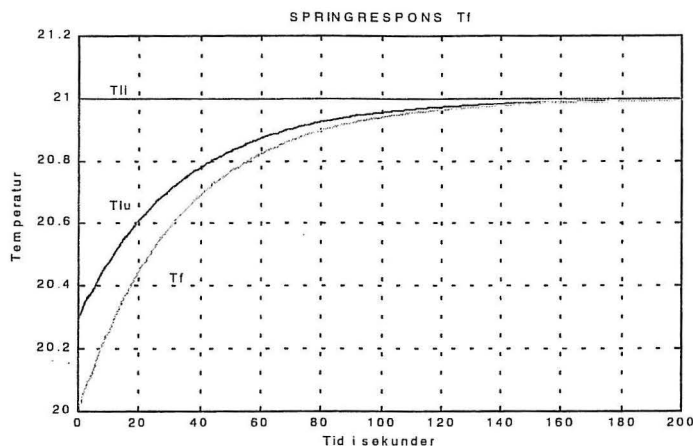
Resultatet af målingen er den KONTROLLEREDE STØRRELSE eller her den målte temperatur ( $T_f$  = "følertemperaturen").

Den målte temperatur ( $T_f$ ) skal naturligvis have samme størrelse som indblæsningstemperaturen ( $T_{lu}$ ), da der ellers forekommer en målefejl, men på grund af varmeakkumulering i føleren, vil det tidsmæssige forløb af den målte temperatur afvige fra indblæsningstemperaturens forløb.

- i) Vi antager, at følerens dynamik kan beskrives ved een TIDSKONSTANT (dvs at  $T_f$  som funktion af  $T_{lu}$  kan udtrykkes ved en 1. ordens differentialligning), hvilket giver følgende karakteristiske indsvingningsforløb for følertemperaturen ( $T_f$ ) ved en momentan ændring af indblæsningstemperaturen ( $T_{lu}$ ) på 1 °C. Følerens tidskonstant er 10 sekunder.



Vi vil nu se, hvordan en momentan ændring i tilgangstemperaturen  $T_{li}$  før varmeffladen på 1 °C vil slå igennem dels i lufttemperaturen efter varmeffladen  $T_{lu}$  og dels i den målte temperatur (følertemperaturen)  $T_f$ :



Det ses at følertemperaturen bliver stationær efter en vis tid, der afhænger af både følerens tidskonstant og dynamikken i de komponenter, som luften passerer.

Under stationære forhold er den målte temperatur (følertemperaturen)  $T_f$  lig med temperaturen på indblæsningsluften  $T_{lu}$ . Følerens statiske karakteristisk er derfor:

$T_f = T_{lu}$  hvorfor den statiske forstærkning for føleren er  $K_f = 1$ .

### 1.3.2 Regulatoren

Regulatoren er den centrale del i ethvert reguleringssystem. Her samles de nødvendige oplysninger om systemets tilstand og her gives ordren til, hvordan der skal gribes ind i systemet, hvis der skal foretages korrektioner.

På regulatoren indstilles den ØNSKEDE VÆRDI for den regulerede størrelse (referenceværdien  $T_{ref}$ ) der sammenlignes med den målte værdi (følertemperaturen  $T_f$ ), hvorved fejlen ( $e$ ) dannes:

$$\text{fejl} = \text{referenceværdi} - \text{målt værdi} \quad e = T_{ref} - T_f$$

Fejlens fortegn og størrelse er bestemmende for hvordan STYRINGSUDSTYRET ændre den STYRBARE STØRRELSE.

Den styrbare størrelse er i vort eksempel ventilstillingen  $H$ , idet vi ved at ændre ventilstillingen kan ændre på varmetilførslen til varmekøleren, og dermed på lufttemperaturen efter varmekøleren ( $T_{lu}$ ).

Dette betyder, at ethvert reguleringssystem udgør en LUKKET virkningskreds, REGULERINGSKREDSSEN.

I styringsudstyret indbygges de egenskaber, der skal være karakteristiske for regulatoren, dvs den STYRINGSFORM der beskriver det funktionelle sammenhæng mellem den styrbare størrelse og fejlen.

Der findes en række standard styringsformer, hvoraf vi her vil se på den simpleste nemlig PROPORTIONAL-STYRING eller P-styring.



### 1.3.3 P-styring

For den ideelle proportionalstyring gælder under både dynamiske og stationære forhold, at der er proportionalitet mellem den styrbare størrelse (ventilstillingen  $H$ ) og fejlen ( $e$ ):  $H = K_c * e$  hvor  $K_c$  er styringsudstyrets FORSTÆRKNING (der kan indstilles på regulatoren). Indføres udtrykket for fejlen (reference ÷ målt værdi) fås:

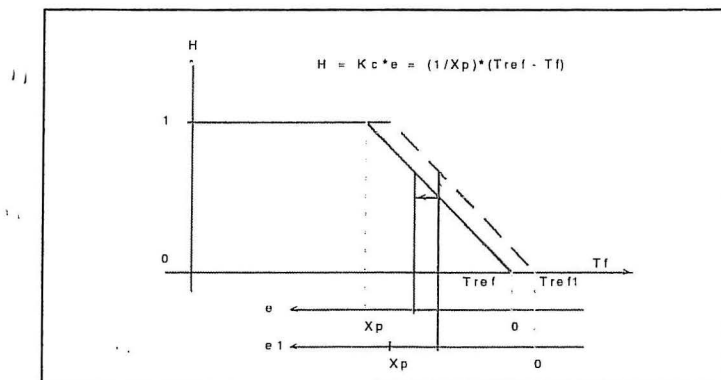
$$H = K_c * e = K_c * (T_{ref} - T_f)$$

Da den styrbare størrelses variationsområde er begrænset til intervallet  $0 \leq H \leq 1$  (fra helt lukket ventil til helt åben), vil kun fejl, der ligger i området  $0 \leq e \leq x_p = 1/K_c$ , kunne ændre ventils stilling. Ved fejl uden for dette område vil reguleringen være uvirksom, da ventilen jo så enten er helt åben eller helt lukket.

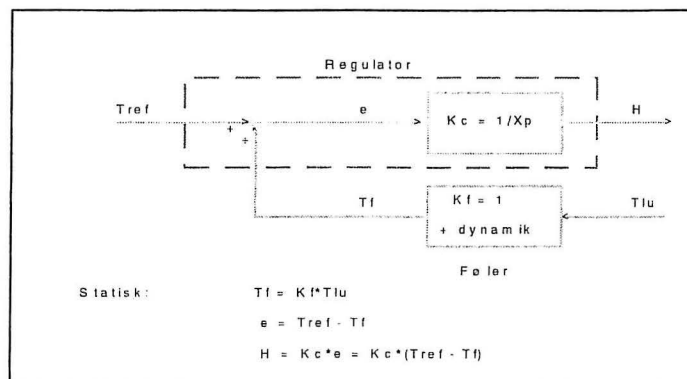
Størrelsen  $x_p$  kaldes PROPORTIONALBÅNDET (PB) og det angiver størrelsen af den fejl, der skal til for at ændre ventilstillingen (den styrbare størrelse) fra den ene yderstilling til den anden.  $x_p$  har samme enhed som den regulerede størrelse - her altså temperatur.

På mange regulatorer vil det være proportionalbåndet  $x_p$  der indstilles og således ikke direkte forstærkningen ( $K_c = 1/x_p$ ).

Under stationære forhold kan styringsudstyrets karakteristik optegnes. Læg mærke til, at ventilstillingen ændres både når den målte temperatur ( $T_f$ ) ændres, og når referenceværdien ( $T_{ref}$ ) ændres.



Vi sammenfatter denne gennemgang af reguleringsudstyrets egenskaber ved at optegne blokkene for føler og regulator (bestående af SAMMENLIGNINGSUDSTYR og styringsudstyr):

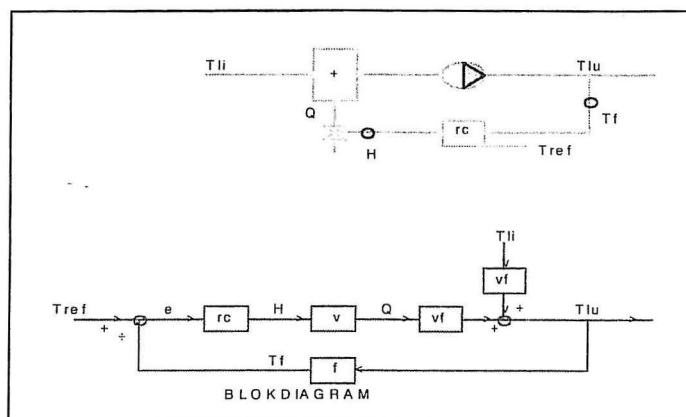


## 1.4 Reguleringsudstyrets virkemåde

Vi har nu fået et første indblik i reguleringsystemets enkelte bestanddele og vi kan herefter sammenbygge reguleringsobjektet med reguleringsudstyret, og se på virkningen af reguleringen.

### 1.4.1 Stationære forhold

Vi sammenbygger nu anlægget (varmeblæse + ventil) med reguleringsudstyret (føler + regulator) som vist på følgende figur:



De statiske karakteristikker kendes nu for alle indgående komponenter, og reguleringsystemets virkemåde under stationære forhold kan således udtrykkes ved:

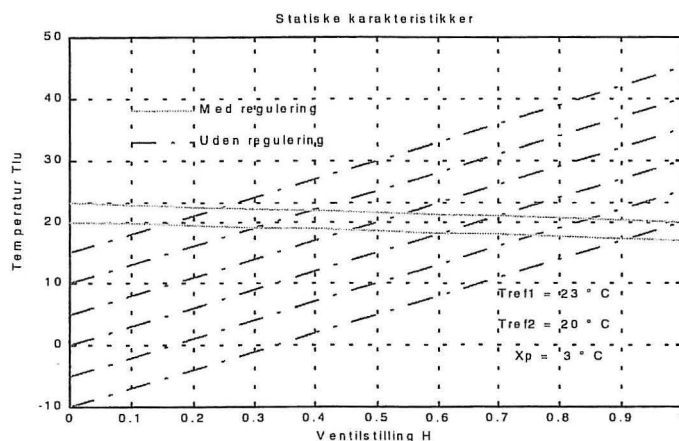
- |                                      |                             |
|--------------------------------------|-----------------------------|
| 1) $T_{lu} = T_{li} + dT_{lmax} * H$ | Varmeblæse + ventil         |
| 2) $H = (1/x_p) * e$                 | Styringsudstyr P-styring    |
| 3) $e = T_{ref} - T_f$               | Sammenligningsudstyr (fejl) |
| 4) $T_f = T_{lu}$                    | Føler                       |

Indsættes 3) og 4) i 2) fås

$$5) H = (1/x_p) * (T_{ref} - T_{lu})$$

der udtrykker, hvordan styringsudstyret vil indstille ventilen i afhængighed af den målte indblæsningstemperatur  $T_{lu}$ , når referencen er indstillet til  $T_{ref}$  og proportionalbåndet til  $x_p$ .

Regulatorens statiske karakteristikk 5) kan nu indtegnes i de statiske karakteristikker for varmeblæse + ventil 1), og den REGULEREDE indblæsningstemperatur vil ligge på karakteristikk 5):



Vi har nu konstateret en karakteristisk egenskab ved et reguleringssystem med P-styring : det er ikke muligt, at fastholde den regulerede størrelse (indblæsnings-temperaturen  $T_{lu}$ ) på den ønskede referenceværdi ( $T_{ref}$ ), når FORSTYRRELSEN ( $T_{li}$ ) gennemløber sit variationsområde.

Dette er en naturlig følge af den styringsform (P-styring) VI HAR VALGT, idet der jo til en bestemt værdi af fejlen, svarer en bestemt værdi af ventilstillingen ( $H = (1/x_p) \cdot e$ ).

Den regulerede størrelses afvigelse fra referencen bliver mindre, jo mindre proportionalbånd  $x_p$  - dvs jo større forstærkning  $K_c = 1/x_p$  - der indstilles på regulatoren.

Set ud fra et krav til STATISK NØJAGTIGHED bør proportionalbåndet således vælges så lille som muligt. Men dette kan have fatale konsekvenser for det dynamiske indsvingningsforløb!

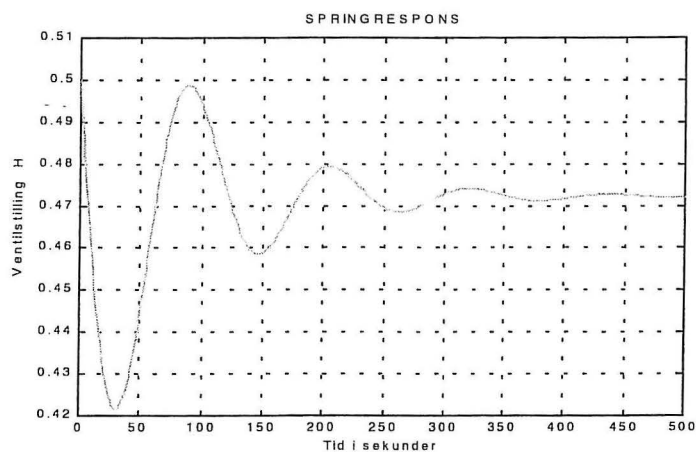
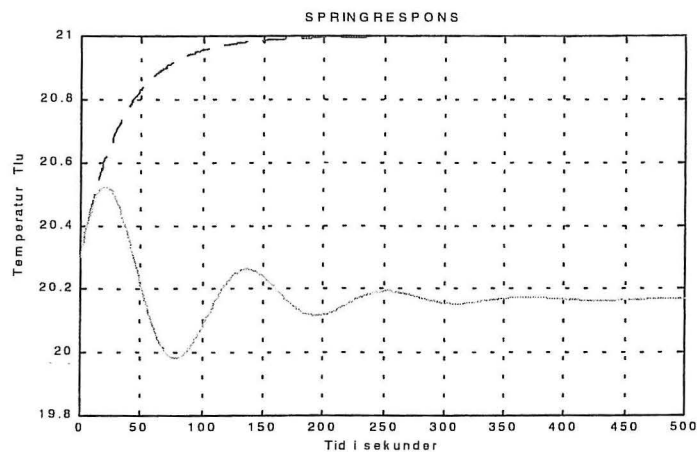
#### 1.4.2 Dynamisk forløb

Vi har tidligere set, hvordan et dynamisk indsvingningsforløb for hhv varmekilde + ventil og for føleren kan se ud, og på denne baggrund vil vi nu se på dynamikken i det regulerede system.

Vi forudsætter, at reguleringssystemet er INDREGULERET således, at den regulerede størrelse (indblæsnings-temperaturen  $T_{lu}$ ) netop er 20 °C ved en tilgangstemperatur på luften før varmekilden på  $T_{li} = 5$  °C.

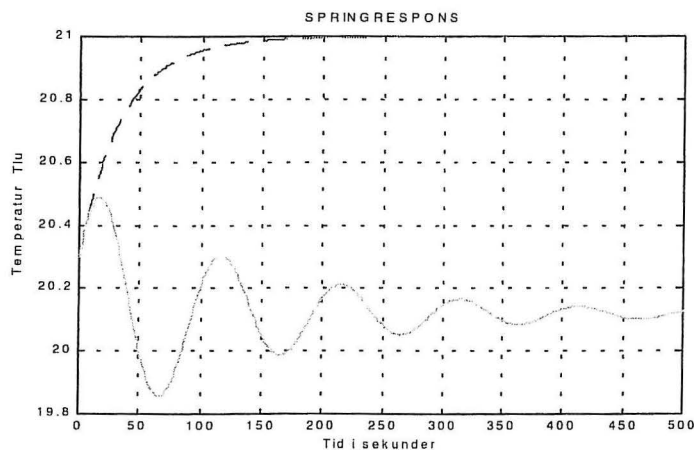
Lad os se hvad der sker, når tilgangstemperaturen momentant stiger 1 °C. Regulatorens proportionalbånd er indstillet (forsigtigt) til  $x_p = 6$  °C.

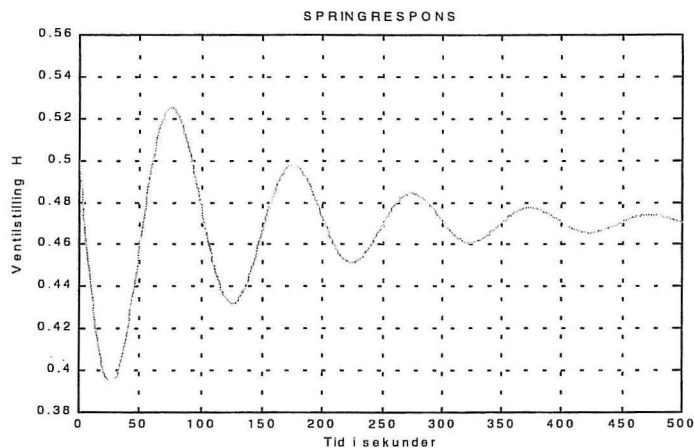
Vi sammenligner først indsvingningsforløbet for den regulerede indblæsnings-temperatur med det tilsvarende indsvingningsforløb uden regulering, og derefter ses hvordan ventilstillingen ændres.



Vi ser, at det regulerede indsvingningsforløb er hurtigere end det tilsvarende uregulerede forløb, samt at den nye stationære SLUTVÆRDI naturligvis bliver mindre, når reguleringen er i drift.

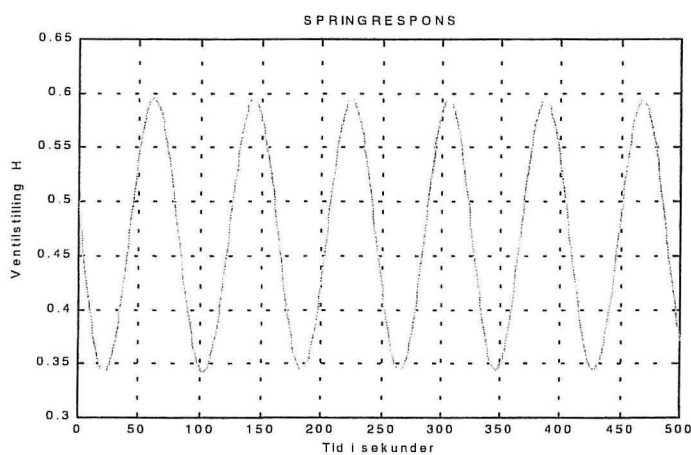
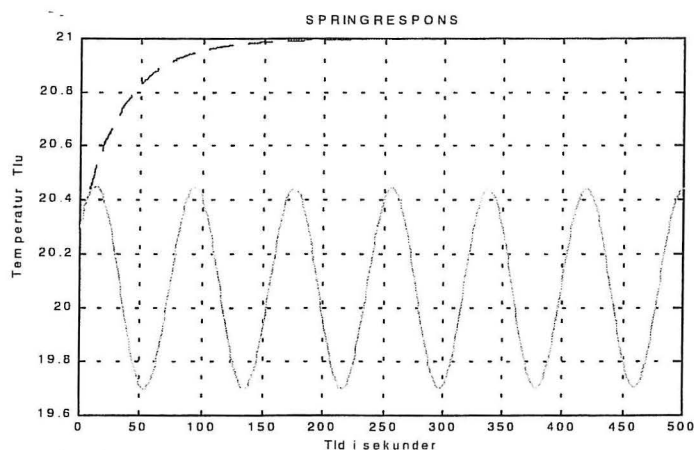
Proportionalbåndet sænkes nu til  $x_p = 4$  °C og vi gentager forsøget under de samme forudsætninger som før:





Indsvingningsforløbet bliver noget mere uroligt end før, og den BLIVENDE AFVIGELSE er en anelse mindre. Bemærk, at ventilen (den styrbare størrelse) nu ændres kraftigere end i første forsøg.

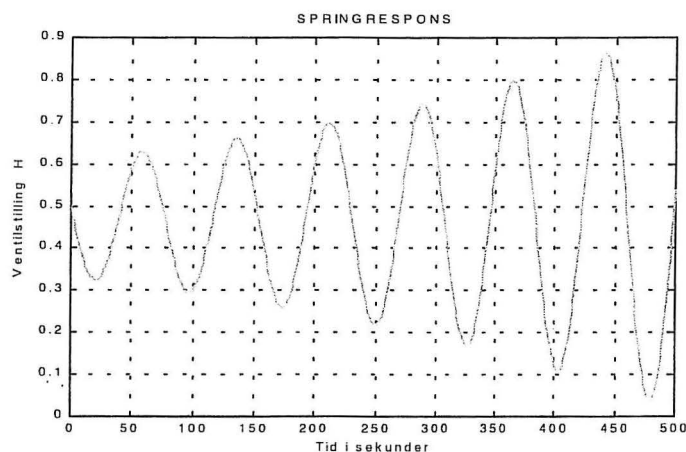
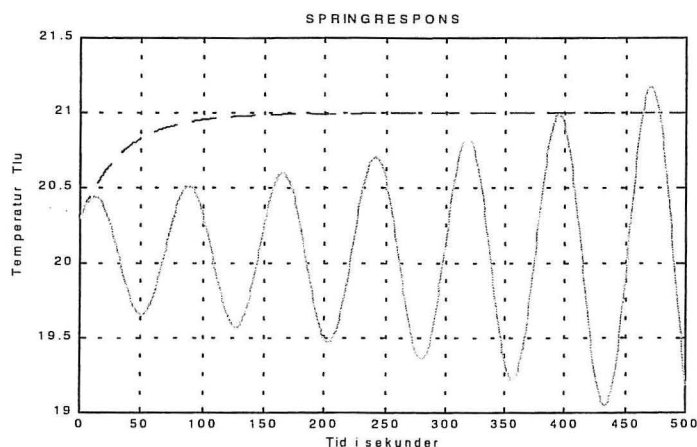
Lad os gentage forsøget endnu engang, men nu med  $x_p = 2,35\text{ }^{\circ}\text{C}$ :



Nu SVINGER den regulerede indblæsningstemperatur med lige store udsving omkring en middelværdi - systemet PENDLER. Endnu er der ikke sket nogen katastrofe. Udsvingene i indblæsningstemperaturen er ikke ret store, men det vil være uheldigt med et anlæg, der opfører sig på denne måde, da det mekaniske slid på ventilen vil være stort.

Vi kan nu konstatere, at der er en grænse for hvor stor en forstærkning, dvs hvor lille  $x_p$ , der kan tillades indstillet på regulatoren, en grænse der må afhænge af systemets dynamiske egenskaber.

Vi er nysgerrige, og sænker P-båndet yderligere, nu til  $x_p = 2^\circ\text{C}$ :



Nu sker der virkeligt noget. Udsvingene i indblæsningstemperaturen bliver større og større, og der vil til sidst indstille sig en tilstand dikteret af, at ventilen svinger mellem helt lukket og helt åbent.

Systemet er USTABILT og ubrugeligt med det aktuelle valg af REGULERINGS-PARAMETRE.

I de efterfølgende kapitler vil vi bl.a. undersøge hvorfor systemet reagerer på denne måde, og vi vil få værktøjer, så vi kan analysere systemets dynamik og finde stabilitetsgrænser. Vi skal endvidere se, at der er en række "anlægstekniske" forhold, der skal tages højde for ved projekteringen af varme- og ventilationsanlæg, for at opnå et reguleringsegnet anlæg.

Inden vi afslutter dette eksempel, skal vi se, at det er muligt at foretage en regulering af indblæsningstemperaturen, så der både opnås en stabil regulering og en god statisk nøjagtighed.

Styringsudstyret i regulatoren ændres fra P-styring til PI-STYRING.

PI-styring står for proportional-integral styring, og uden at gå i detaljer skal blot nævnes, at ventilstillingen nu ændres både proportionalt med fejlen og proportionalt med integralet af fejlen. Der skal indstilles to parametre på regulatoren: P-båndet  $x_p$  og integrationstiden ( $\tau_i$ ).

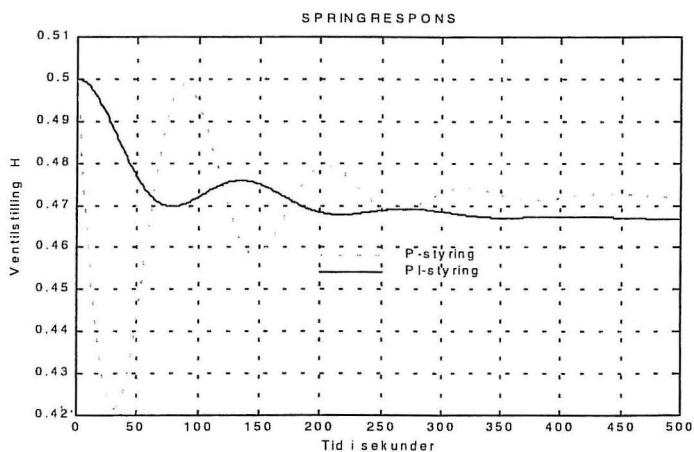
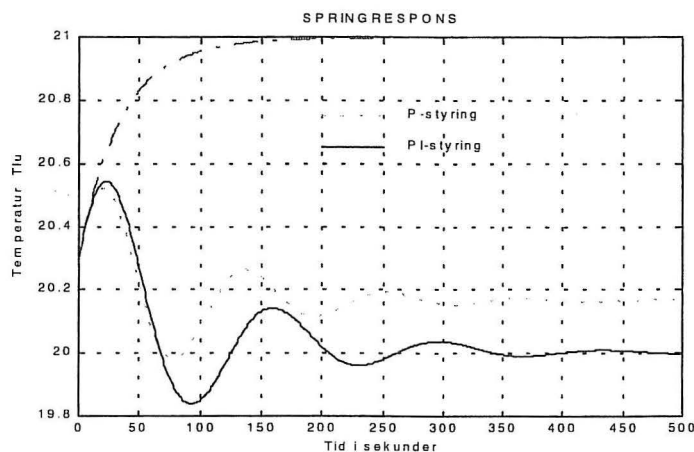
Med startforudsætninger som tidligere kan vi sammenligne systemet med hhv P-styring og PI-styring. Reguleringdparametrene indstilles til:



$x_p = 6^\circ\text{C}$  ved P-styring (som før), og

$x_p = 8^\circ$  samt  $\tau_i = 100$  sekunder ved PI-styring.

Indsvingningsforløbene for hhv indblæsningstemperaturen  $T_{lu}$  og ventilstillingen  $H$  ser således ud:



PI-styringen har således den egenskab, at belastningsafvigelsen udreguleres efter en vis tid og den regulerede størrelse ( $T_{lu}$ ) antager den ønskede referenceværdi. Ventilen kan altså indtage en ny stilling samtidig med, at fejlen er nul - hvilket jo ikke er muligt med P-styring.

## Kapitel 2 DYNAMISKE MODELLER OG SIMULERING

### Opbygning af matematiske modeller og løsningsmetoder

#### 2.1 Dynamiske modeller

Ved enhver teoretisk analyse af et termisk systems driftsforhold under varierende belastningsforhold er det nødvendigt at opbygge matematiske modeller, der beskriver det fysiske systems virkemåde. Modellerne er nødvendige, hvis der skal opnås bedre forståelse af et systems dynamiske reaktion på forskellige påvirkninger, hvadenten det drejer sig om specielle undersøgelser under designfasen eller som her, at få indblik i det teoretiske grundlag for reguleringssystemers virkemåde.

Matematiske modeller kan opstilles ud fra forskellige metoder: et rent teoretisk grundlag baseret på fysiske sammenhænge, eller et rent empirisk grundlag baseret på eksperimenter udført på eksisterende systemer, eller på en passende kombination af begge metoder.

Når modeller opbygges ud fra et rent teoretisk grundlag indgår systemets dynamiske forhold primært gennem de respektive balanceligninger, der kommer til udtryk i de grundlæggende fysiske lovmæssigheder, der er gældende for systemet. For at opstille disse balanceligninger opdeles processen eller anlægget i delprocesser (eller anlægsdele), der er så simple som muligt. De grundlæggende fysiske love om bevarelse af masse, energi eller bevægelsesmængde kan herefter anvendes på delsystemerne, eventuelt suppleret med tilstandsligningen eller andre konstitutive love (Fouriers lov om varmeledning e.l.). For det enkelte delsystem fremkommer således et sæt af lineære eller ikke lineære, ordinære eller partielle differentiaalligninger, der sammen med randbetingelserne, der dels knytter delsystemerne sammen og dels knytter hele systemet sammen med omgivelserne, udgør den matematiske model for systemet.

Hvis der foretages en eksperimentel analyse af et system måles de fysiske indgangs- og udgangsstørrelser (input og output), hvorefter de målte størrelser underkastes en identifikationsproces der giver det matematiske sammenhæng mellem en eller flere indgangs- og udgangsstørrelser. Modeller af denne type kalde ikke-parametriske, men hvis man på forhånd kender eller kan antage formen på systemets modelstruktur, er det muligt at opbygge identifikationsprocessen, således at der kan foretages en bestemmelse af modellens parametre.

Opstilling af en matematisk model må sædvanligvis bygge på en række simplificerende forudsætninger for at begrænse modellens kompleksitet, hvorfor modelleringsnøjagtigheden er et væsentligt problem. Afhængig af modellens anvendelse må der i hvert enkelt tilfælde foretages et kompromis mellem en nedre grænse for nøjagtighed og en øvre grænse dikteret af modellens matematiske kompleksitet. Modellerne kan opdeles i modeller med fordelte parametre og i modeller med koncentrerede parametre. I modeller med fordelte parametre beskrives det dynamiske forløb ved partielle differentiaalligninger, mens der i modeller med koncentrerede parametre anvendes ordinære lineære eller ikke lineære differentiaalligninger til at beskrive systemet. I mange tilfælde vil man ofte reducere et system, der oprindeligt er beskrevet ved en model med fordelte parametre, til en model med koncentrerede parametre fx gennem en diskretisering i stedkoordinaten. Modeller med koncentrerede parametre kan ligeledes diskretiseres i tiden og dermed beskrives ved en differensligning, der er velegnet til edb-løsning (numerisk løsning).

Matematisk modellering er således lidt af en "kunst", hvor det kan være nødvendigt at prøve sig frem, startende med en simpel model der senere kan udbygges i kompleksitet, hvis det viser sig nødvendigt. En grundregel bør dog altid følges, nemlig at den dynamiske model altid bør indeholde den korrekte stationære model. I visse tilfælde er et system så hurtigt, eller et delsystem meget hurtigere end resten af systemet, således at der kan ses bort fra systemets dynamik, hvorfor systemet kan beskrives alene ved sin stationære model.

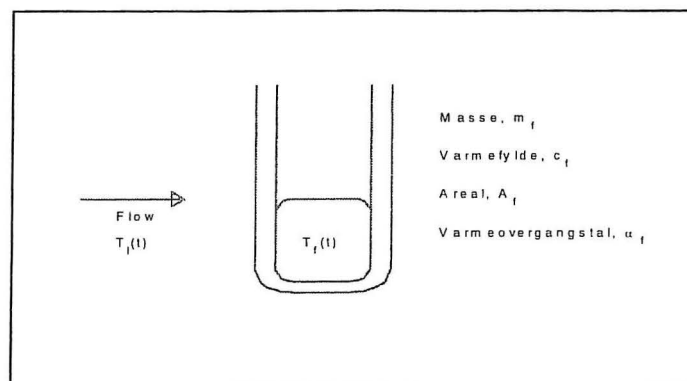
I det følgende gives nogle eksempler på opstilling af matematiske modeller for udvalgte termiske systemer for at give et indtryk af den arbejdsgang der kan anvendes og de forskellige former af modelstrukturer der opstår. Dette leder samtidigt ind på problemstillingen med løsning af de opstillede ligningssystemer – eller simulering af systemet der beskrives med de opstillede modeller, hvor der gives en introduktion til analytiske løsninger og specielt numeriske løsninger velegnet til edb-behandling.

## 2.2 Første ordens systemer

I dette afsnit opstilles to simple modeller der beskriver dynamikken for hhv. et temperaturmåleelement og for rumtemperaturen i et lokale og der afsluttes med at de to systemer kobles sammen. De to modeller vil blive opstillet med samme modelstruktur, nemlig som 1. ordens modeller der beskrives ved en ordinær 1. ordens differentialligning, men de to modeller adskiller sig væsentligt ved mængden af forudsætninger, der må gøres for at holde den dynamiske beskrivelse på så simpel en form.

### 2.2.1 Modellering af temperaturføler

Det første simple eksempel vi vil behandle er opstilling af en model for føleret elementet i en temperaturmåler som vist på figur 2.2.1-1.



Figur 2.2.1-1. Temperaturføler

Temperaturføleren kan repræsentere kviksløvkolben i et søjletermometer eller måleelementet i et modstandstermometer, en termistorføler eller et termoelement. Føleren

har massen  $m_f$ , varmekapaciteten  $c_f$  og arealet  $A_f$ . Der er et konvektivt varmeovergangstal  $\alpha_f$  mellem føleren, der har temperaturen  $T_f(t)$ , og det omgivende medium med temperaturen  $T_l(t)$ , hvor  $t$  er tiden.

Antages at der kan ses bort fra temperaturgradienter i følermaterialet samt varmeledning i følerens længderetning, kan følerens temperatur bestemmes ud fra følgende varmebalance:

**Ændring i elementets indre energi = summen af tilførte varmestrømme**

hvilket giver:

$$m_f c_f \frac{dT_f(t)}{dt} = \alpha_f A_f (T_l(t) - T_f(t)) \quad (2.2.1 - 1)$$

Sættes følerens varmekapacitet til  $C_f = m_f c_f$  og varmeovergangsmodstanden  $R_f = 1/\alpha_f A_f$  kan balanceligningen udtrykkes ved:

$$R_f C_f \frac{dT_f(t)}{dt} = T_l(t) - T_f(t) \quad (2.2.1 - 2)$$

Produktet  $R_f C_f$  har dimension af tid og udgør således en karakteristisk **tidskonstant**  $\tau_f$  for systemet, der her er beskrevet med en første ordens ordinær differentialligning.

$$\tau_f \frac{dT_f(t)}{dt} + T_f(t) = T_l(t) \quad (2.2.1 - 3)$$

Ligningen beskriver, hvordan den afhængige variable  $T_f(t)$  (udgangsstørrelse, respons, output) afhænger af den uafhængige variable  $T_l(t)$  (indgangsstørrelse, påvirkning, input) som funktion af tiden. Det bemærkes at under stationære forhold ( $dT_f(t)/dt = 0$ ) er  $T_f = T_l$ , følerens **statistiske karakteristisk**.

Fysiske systemer der kan beskrives gennem en matematisk model der er en 1. ordens differentialligning kaldes systemer af 1. orden.

Med kendskab til det matematiske udtryk for påvirkningsfunktionen  $T_l(t)$  kan responsen  $T_f(t)$  bestemmes gennem en analytisk løsning af differentialligningen med kendt teknik:

$$T_f(t) = T_f(0)e^{-\frac{t}{\tau_f}} + \frac{1}{\tau_f} e^{-\frac{t}{\tau_f}} \left[ \int_0^t e^{\frac{t}{\tau_f}} T_l(t) dt \right] \quad (2.2.1 - 4)$$

hvor  $T_f(0)$  er følerelementets temperatur til tiden  $t = 0$  (**begyndelsesbetingelsen**).

**Eksempel 2.2.1-1.** Et følerelement har i lang tid haft temperaturen  $T_f = 20^\circ\text{C}$  og nedsænkes (pludseligt) til tiden  $t = 0$  i en beholder med den konstante temperatur  $T_l = 40^\circ\text{C}$ . Beregn og optegn følertemperaturen som funktion af tiden, når føleren (under disse omstændigheder) har tidskonstanten  $\tau_f = 10$  sec.

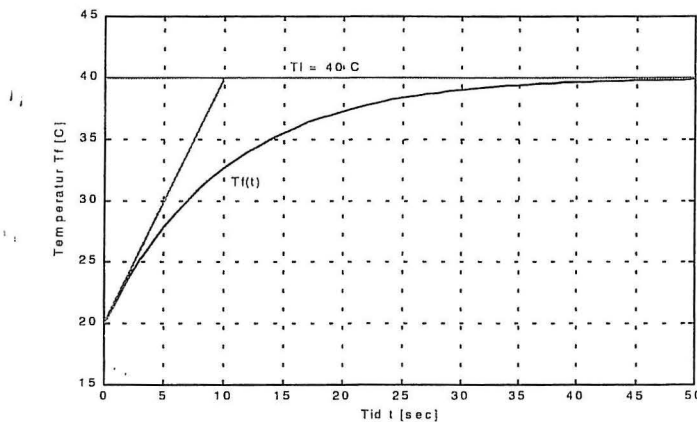
**Løsning.** Den påvirkning temperaturløseren udsættes for kan beskrives ved en funktion der er konstant for tider  $t < 0$ , til tiden  $t = 0$  sker et momentant spring (her på  $40 - 20 = 20$  °C) og for  $t > 0$  har funktionen en konstant værdi. Denne funktionstype har fået et specielt navn: en **springfunktion** eller blot et spring og denne anvendes hyppigt ved undersøgelser af dynamiske systemers reaktion der tilsvarende benævnes **springrespons**.

Ved anvendelse af (2.2.1-4) med  $T_f(0) = T_f = 20$  °C og  $T_l(t) = T_l = 40$  °C fås :

$$T_f(t) = T_f e^{-\frac{t}{\tau_f}} + T_l(1 - e^{-\frac{t}{\tau_f}}) = 20e^{-\frac{t}{10}} + 40(1 - e^{-\frac{t}{10}})$$

De numeriske beregninger og optegning af grafen foretages i MATLAB med følgende beregningssekvens:

```
t = 0:50;
Tf = 20*exp(-t/10) + 40*(1-exp(-t/10));
plot(t,Tf), grid
```



Figur 2.2.1-2. Springrespons for temperaturløser.

På figuren er indlagt tangenten i begyndelsespunktet, der skærer asymptoten ( $T_f = T_l = 40$  °C) efter en tid svarende til tidskonstanten  $\tau_f$ .

Funktionsværdien til tiden  $t = \tau_f$  bliver:

$$T_f(\tau_f) = 20 + (40 - 20)(1 - e^{-1}) = 20 + (40 - 20) \cdot 0.632$$

følertemperaturen er således nået 63,2% af sin endelige ændring efter en tid svarende til tidskonstanten.

Hvis føleren i dette eksempel havde været tilsluttet en (kalibreret) x-t-skriver, ville man få en registrering af den målte temperatur svarende til grafen i figur 2.2.1-2, og ved at indlægge tangenten i begyndelsespunktet samt asymptoten som vist, vil man således kunne bestemme følerens tidskonstant.

...

I mange tilfælde, fx ved behandling af reguleringssystemer, er det ikke nødvendigt at bestemme det "absolutte" forløb af systemets indsvingningen efter en ændring i påvirkningen, men kun ændringens størrelse ud fra begyndelsestilstanden. I sådanne tilfælde er det hensigtsmæssigt at omskrive den matematiske model, således at de variable kun udtrykker ændringen fra en vilkårlig stationær begyndelsestilstand.

Med udgangspunkt i modellen (2.2.1-3) indføres et nyt sæt variable givet ved:

$$\begin{aligned}\Delta T_f(t) &= T_f(t) - T_f(0) \\ \Delta T_l(t) &= T_l(t) - T_l(0)\end{aligned}\quad (2.2.1-5)$$

Indsættes dette sæt af variable i (2.2.1-3), og erindres at under stationære forhold er  $T_f(0) = T_l(0)$ , får modellen følgende udseende:

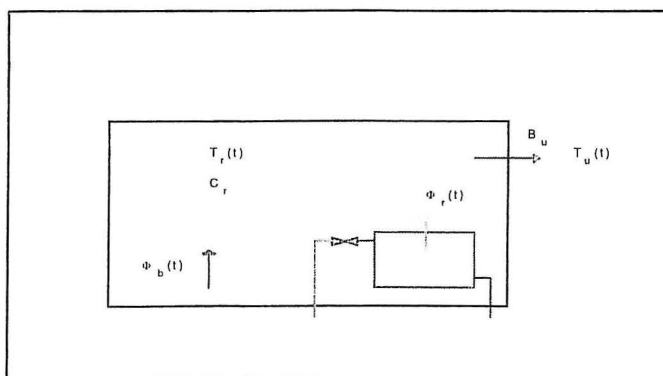
$$\tau_f \frac{d\Delta T_f(t)}{dt} = \Delta T_l(t) - \Delta T_f(t) \quad (2.2.1-6)$$

Det er således meget enkelt at ændre modellen, således at den beskriver ændringer, idet alle de indgående variable i den oprindelige model blot udskiftes med deres ændringsværdier. Begyndelsesværdierne bliver nu meget simple idet  $\Delta T_f(0) = \Delta T_l(0) = 0$ .

## 2.2.2 Rummodel

Her skal opstilles en model, der beskriver rumtemperaturens ændring i afhængighed af de termiske belastninger, der påvirker rummet. Da dette termiske system er yderst komplekst på grund af varmeakkumulering i de omgrænsende bygningskonstruktioner, opstilles modellen med så kraftige forenklinger som overhovedet muligt, når der skal tages hensyn til en vis varmeakkumuleringseffekt i systemet. Der vil i andre sammenhænge være rig mulighed for at diskutere dette system i detaljer, så derfor arbejdes videre med denne model, der altså ikke er "den korrekte model", men en model der viser noget principielt, som vi har brug for i øjeblikket.

Systemet der behandles er vist på nedenstående skitse:



Figur 2.2.2-1. Radiatoropvarmet rum.



Al varmeakkumulering henføres til rumtemperaturen  $T_r(t)$  gennem varmekapaciteten  $C_r$ , rummets varmetab angives ved en varmetabsfaktor  $B_u$  til udtemperaturen  $T_u(t)$ . Rummet tilføres varmemstrømmen  $\Phi_b(t)$  fra diverse termiske belastninger og varmemstrømmen  $\Phi_r(t)$  fra radiatoren. En varmebalance for rummet giver:

$$C_r \frac{dT_r(t)}{dt} = \Phi_r(t) + \Phi_b(t) + B_u(T_u(t) - T_r(t)) \quad (2.2.2 - 1)$$

Indføres rummets tidskonstant ved  $\tau_r = C_r/B_u$  fås følgende model til bestemmelse af rumtemperaturen:

$$\tau_r \frac{dT_r(t)}{dt} + T_r(t) = \frac{1}{B_u} \Phi_r(t) + \frac{1}{B_u} \Phi_b(t) + T_u(t) \quad (2.2.2 - 2)$$

Modellen angiver rumtemperaturen som funktion af de tre påvirkninger (indgangsstørrelser)  $\Phi_r(t)$ ,  $\Phi_b(t)$  og  $T_u(t)$ . Under stationære forhold fås de statiske karakteristikker:

$$T_r = \frac{1}{B_u} \Phi_r + \frac{1}{B_u} \Phi_b + T_u \quad (2.2.2 - 3)$$

Ændres en eller flere af påvirkningerne vil også den afhængige størrelse ændres, hvilket under stationære forhold kan udtrykkes ved:

$$\frac{\partial T_r}{\partial \Phi_r} = \frac{1}{B_u} \quad \frac{\partial T_r}{\partial \Phi_b} = \frac{1}{B_u} \quad \frac{\partial T_r}{\partial T_u} = 1 \quad (2.2.2 - 4)$$

der betegnes som den **statistiske forstærkning** mellem den uafhængige variable og den pågældende påvirkning.

### 2.2.3 Sammenkobling af to 1. ordens systemer

Med udgangspunkt i de to modeller der i det foregående er beskrevet for hhv. følertemperaturen og rumtemperaturen, vil vi nu undersøge, hvordan vi kan bestemme følertemperaturen hvis føleretlementet placeres i rummet. Modellen for føleren beskriver hvordan følertemperaturen ændres, når temperaturen der omgiver føleren ændres, men den omgivende temperatur er nu rumtemperaturen, der ændres når de termiske belastninger på rummet ændres. Dette sammenhæng kommer direkte til udtryk gennem de to modeller:

$$\tau_f \frac{dT_f(t)}{dt} + T_f(t) = T_r(t) \quad (2.2.1 - 3)$$

$$\tau_r \frac{dT_r(t)}{dt} + T_r(t) = \frac{1}{B_u} \Phi_r(t) + \frac{1}{B_u} \Phi_b(t) + T_u(t) \quad (2.2.2 - 2)$$

hvor det sammensatte system således må udtrykkes ved to samhørende 1. ordens differentialligninger.

Dette system af ligninger kaldes en **tilstandsbeskrivelse** (på engelsk state-space representation) idet de afhængige variable beskriver tilstanden internt i systemet. Denne

form giver visse fordele, når der er behov for numeriske løsningsmetoder, som det senere skal ses.

Det er imidlertid muligt direkte at bestemme følerens temperaturafhængighed af de termiske påvirkninger på rummet ved at eliminere rumtemperaturen ( $T_i = T_r$ ) i følerens balanceligning (2.2.1-3) under anvendelse af rumbalancen (2.2.2-2). For at gøre dette må (2.2.1-3) dog bringes på en form, hvor den afledte af rumtemperaturen ( $dT_r/dt$ ) indgår. Kaldes ligning (2.2.1-3) for F kan denne operation gøres på følgende måde:  $\tau_r dF/dt + F$  hvilket giver:

$$\tau_r \tau_f \frac{d^2 T_f(t)}{dt^2} + (\tau_r + \tau_f) \frac{dT_f(t)}{dt} + T_f = \tau_r \frac{dT_r(t)}{dt} + T_r(t)$$

og indsættes (2.2.2-2) heri fås:

$$\tau_r \tau_f \frac{d^2 T_f(t)}{dt^2} + (\tau_r + \tau_f) \frac{dT_f(t)}{dt} + T_f = \frac{1}{B_u} \Phi_r(t) + \frac{1}{B_u} \Phi_b(t) + T_u(t)$$

Systemet er nu beskrevet ved en 2. ordens differentialligning eller en **2. ordens model**.

## 2.2.4 Sammenfatning

I det foregående er behandlet nogle eksempler på termiske systemer, hvor der kan anvendes modeller med koncentrerede parametre, således at systemets dynamik kan udtrykkes gennem en n. ordens ordinær differentialligning, der har den generelle form:

$$\frac{d^n y(t)}{dt^n} + p_{n-1} \frac{d^{n-1} y(t)}{dt^{n-1}} + \dots + p_1 \frac{dy(t)}{dt} + p_0 y(t) = q_n \frac{d^n f(t)}{dt^n} + \dots + q_1 \frac{df(t)}{dt} + q_0 f(t)$$

(2.2.4 - 1)

hvor  $y(t)$  er udgangsstørrelsen (den afhængige variable) og  $f(t)$  er påvirkningen (den uafhængige variable). Vi har da en model der beskriver et system af **1., 2. eller højere orden**.

Det blev endvidere vist, at to samhörørende 1. ordens differentialligninger leder frem til en 2. ordens differentialligning til direkte bestemmelse af den ene af udgangsstørrelserne gennem en eliminering af den anden udgangsstørrelse. Generaliseres dette princip kan n samhörørende 1. ordens differentialligninger altså repræsentere en n. ordens differentialligning, og omvendt vil en n. ordens differentialligning kunne opløses i et system af n samhörørende 1. ordens differentialligninger. Denne opløsning er dog ikke unik, men afhænger af hvilke mellemvariable eller **tilstandsvariable** der vælges under opløsningen. Vi har dermed en **tilstandsbeskrivelse** for systemet, der generelt angives ved følgende matrix-skrivemåde:

$$\mathbf{x}' = \mathbf{Ax} + \mathbf{bf}(t) \quad (2.2.4 - 2)$$

$$y = \mathbf{c}^T \mathbf{x} + \mathbf{df}(t) \quad (2.2.4 - 3)$$

hvor:

$$\mathbf{x}' = \begin{bmatrix} x_1' \\ \vdots \\ x_n' \end{bmatrix} \quad \text{og} \quad \mathbf{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} \quad (2.2.4 - 4)$$

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix} \quad \text{og} \quad \mathbf{b} = \begin{bmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix} \quad (2.2.4 - 5)$$

$$\mathbf{c}^T = \begin{bmatrix} c_1 & \cdots & c_n \end{bmatrix} \quad (2.2.4 - 6)$$

Som tidligere nævnt afhænger koefficientmatricerne ( $\mathbf{A}, \mathbf{b}, \mathbf{c}, d$ ) af hvordan opløsningen af differentialligningen foretages og nedenfor angives en af de mulige opskrifter til beregning af koefficienterne (denne opstilling anvendes bl.a. i MATLAB og betegnes inden for regulerings teorien som den styrbare kanoniske form).

$$\mathbf{x}' = \begin{bmatrix} -p_{n-1} & -p_{n-2} & \cdots & -p_1 & -p_0 \\ 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 & 0 \end{bmatrix} \mathbf{x} + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} f(t) \quad (2.2.4 - 7)$$

$$y = \begin{bmatrix} (q_{n-1} - q_n p_{n-1}) & (q_{n-2} - q_n p_{n-2}) & \cdots & (q_1 - q_n p_1) & (q_0 - q_n p_0) \end{bmatrix} \mathbf{x} + q_n f(t)$$

## 2.3 Laplacetransformation

Vi har nu set på opstillingen af nogle simple dynamiske modeller beskrevet ved ordinære lineære differentialligninger, der angiver virkningssammenhængen mellem en eller flere indgangs størrelser og en udgangs størrelse, hvorefter vi kan vende os mod løsningen af ligningerne eller simuleringen af systemerne. Både af hensyn til løsning af differentialligningerne og af hensyn til sammensætning af flere delsystemer til et samlet system er det hensigtsmæssigt at have et regneredskab, der forenkler manipulationen med differentialligninger til simple regningsarter. Dette kan opnås gennem en Laplace-transformation af differentialligningen, der herved omdannes til en algebraisk ligning i en ny variabel  $s$ . Den transformerede til løsningen til differentialligningen findes herefter ved simple algebraisk regning i  $s$ -området (Laplaceområdet), og sluttelig findes løsningen til differentialligningen ved en tilbagetransformation til tidsområdet.

### 2.3.1 Regneregler for Laplacetransformation

Laplacetransformation af en funktion  $f(t)$  er defineret ved følgende operation:

$$L\{f(t)\} = \int_0^{\infty} f(t) e^{-st} dt = F(s) \quad (2.3.1 - 1)$$

hvor  $s$  er Laplaceoperatoren. Funktionen  $F(s)$  kaldes den Laplacetransformerede af  $f(t)$ .

Der er naturligvis knyttet en række betingelser til funktionen  $f(t)$ , for at den kan transformeres, hvoraf de vigtigste er:

- 1) funktionen  $f(t)$  skal være stykkevis kontinuert for  $t > 0$ , og
- 2) integralet i (2.3.1-1) skal kunne udregnes, altså have en grænseværdi for  $t \rightarrow \infty$ .

Det kan i øvrigt vises, at transformationen er entydig, men vi vil ikke her beskæftige os med eksistens- eller entydighedsbeviser men kun fremdrage nogle af regnereglerne, der alle bygger på definitions-ligningen (2.3.1-1).

Den vigtigste regneregler er knyttet til transformation af en differentialkvotient  $f'(t)$ :

$$\begin{aligned} L\{f'(t)\} &= \int_0^{\infty} f'(t)e^{-st} dt = \left[ f(t)e^{-st} \right]_0^{\infty} - \int_0^{\infty} f(t)(-se^{-st}) dt \\ &= -f(0) + s \int_0^{\infty} f(t)e^{-st} dt = sF(s) - f(0) \end{aligned} \quad (2.3.1-2)$$

hvor  $f(0) = f(t=0)$  hvilket er funktionen  $f(t)$ 's begyndelsesværdi.

Hermed er den søgte enkle regneoperation for en differentialkvotient påvist. Differentiationsreglen kan hurtigt udvides ved gentagen anvendelse af (2.3.1-2):

$$L\{f''(t)\} = sL\{f'(t)\} - f'(0) = s[sF(s) - f(0)] - f'(0) = s^2 F(s) - sf(0) - f'(0) \quad (2.3.1-3)$$

Den Laplacetransformerede til en differentialkvotient indeholder således alle begyndelsesværdierne, hvilket gør denne transformation særlig velegnet til løsning af "begyndelses-værdiproblemer". Særligt simpelt er det, hvis alle begyndelsesværdier er **nul**, hvilket betyder at systemet starter i en stationær ligevægt.

Laplacetransformationen er en lineær operation hvilket ses af:

$$L\{af(t) + bg(t)\} = \int_0^{\infty} (af(t) + bg(t))e^{-st} dt = a \int_0^{\infty} f(t)e^{-st} dt + b \int_0^{\infty} g(t)e^{-st} dt = aF(s) + bG(s)$$

**Eksempel 2.3.1-1.** Bestem den Laplacetransformerede til en konstant  $k$ .

**Løsning.** Konstanten  $k$  kan opfattes som en funktion af tiden ved at antage:  $f(t) = k$  for  $t \geq 0$  og  $f(t) = 0$  for  $t < 0$ . Dette svarer til en trinfunktion eller en springfunktion, hvor funktionsværdien ændres momentant til tiden nul. Defineres et enhedsspring som  $u(t) = 1$  fås  $k = ku(t)$  og den Laplacetransformerede er således:

$$L\{k\} = \int_0^{\infty} ku(t)e^{-st} dt = k \int_0^{\infty} 1 \cdot e^{-st} dt = k \left[ -\frac{1}{s} e^{-st} \right]_0^{\infty} = \frac{k}{s}$$

Heraf ses at den transformerede til et enhedsspring  $u(t) = 1$  er  $L\{u(t)\} = 1/s$ .

...

**Eksempel 2.3.1-2.** Find den Laplacetransformerede til funktionen  $f(t) = \exp(-at)$ .

**Løsning:** Funktionen indsættes i definitions-ligningen (2.3.1-1) og der fås:

$$L\{e^{-at}\} = \int_0^{\infty} e^{-at} e^{-st} dt = \int_0^{\infty} e^{-(s+a)t} dt = \left| -\frac{1}{s+a} e^{-(s+a)t} \right|_0^{\infty} = \frac{1}{s+a}$$

Omvendt, hvis vi finder at  $F(s) = 1/(s+a)$ , så ved vi at  $f(t) = \exp(-at)$ , idet denne funktion jo netop har  $F(s)$  som Laplacetransformeret.

Funktionen  $\exp(-at)$  spiller en stor rolle ikke alene ved løsning af differentiaalligninger men også som grundlag for definition af andre funktioner som fx hyperbolske og trigonometriske funktioner og dermed for disse funktioners transformerede.

Den Laplacetransformerede til  $\sinh(at)$  er således:

$$L\{\sinh(at)\} = L\left\{\frac{1}{2}(e^{at} - e^{-at})\right\} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{s-a} - \frac{1}{s+a}\right) = \frac{a}{s^2 - a^2}$$

Da  $\cosh(at) = (1/a)d(\sinh(at))/dt$  giver differentiationsreglen  $L\{\cosh(at)\} = s/(s^2 - a^2)$ .

Udtrykkes de trigonometriske funktioner v.h.a. Euler formlerne:

$$\begin{aligned} e^{iv} &= \cos(v) + i \sin(v) \\ e^{-iv} &= \cos(v) - i \sin(v) \end{aligned} \quad \text{hvor } i = \sqrt{-1}$$

fås:

$$\begin{aligned} \sin(v) &= \frac{e^{iv} - e^{-iv}}{2i} = \frac{\sinh(iv)}{i} \\ \cos(v) &= \frac{e^{iv} + e^{-iv}}{2} = \cosh(iv) \end{aligned}$$

Den laplacetransformerede til  $\sin(at)$  bliver derfor:

$$L\{\sin(at)\} = L\left\{\frac{1}{2i}(e^{iat} - e^{-iat})\right\} = \frac{1}{2i}\left(\frac{1}{s-ia} - \frac{1}{s+ia}\right) = \frac{a}{s^2 + a^2}$$

Den transformerede til  $\cos(at)$  findes igen ved anvendelse af differentiationsreglen idet  $\cos(at) = (1/a)d(\sin(at))/dt$  hvorfor  $L\{\cos(at)\} = s/(s^2 + a^2)$ .

...

**Forsinkelsesreglen.** Lad der være givet en funktion  $f(t)$  hvor  $f(t) = 0$  for  $t < 0$ . Parallelforskydes denne funktion  $t_0$  tidsenheder i tidsaksens retning, d.v.s. at funktionen forsinkes  $t_0$  tidsenheder, hvorved den kan udtrykkes ved  $f(t - t_0)$  hvor funktionsværdien er nul for  $t < t_0$ , svarer til at den Laplacetransformerede til  $f(t)$  multipliceres med  $\exp(-t_0 s)$ :

$$L\{f(t - t_0)\} = e^{-t_0 s} F(s)$$

**Slutværdireglen.** Grænseværdien af  $f(t)$  for  $t \rightarrow \infty$  kan findes direkte i Laplaceområdet, uden at foretage en tilbagetransformation, gennem følgende grænseovergang:

$$\lim_{t \rightarrow \infty} (f(t)) = \lim_{s \rightarrow 0} (sF(s))$$

**Begyndelsesværdireglen.** Angiver hvordan begyndelsesværdien for funktionen  $f(t)$  kan findes direkte af den Laplacetransformerede:

$$\lim_{t \rightarrow 0} (f(t)) = \lim_{s \rightarrow \infty} (sF(s))$$

I tabel 2.3.1-1 opsummeres regnereglerne for Laplacetransformation og der er desuden angivet de vigtigste funktioner og deres Laplacetransformerede.

**Tabel 2.3.1-1. Regneregler og Laplacetransformerede.**

$L\{f(t)\} = \int_0^{\infty} f(t)e^{-st} dt = F(s)$			
$L\{f'(t)\} = sF(s) - f(0)$			
$L\{f^{(n)}(t)\} = s^n F(s) - s^{n-1}f(0) - \dots - f^{(n-1)}(0)$			
$L\left\{\int_0^t f(t)dt\right\} = \frac{1}{s} F(s)$			
$L\{af(t) + bg(t)\} = aF(s) + bG(s)$			
$L\{f(t - t_0)\} = e^{-t_0 s} F(s)$			
$\lim_{t \rightarrow \infty} (f(t)) = \lim_{s \rightarrow 0} (sF(s))$			
$\lim_{t \rightarrow 0} (f(t)) = \lim_{s \rightarrow \infty} (sF(s))$			
$f(t)$	$F(s)$	$f(t)$	$F(s)$
$u(t) = 1$	$\frac{1}{s}$	$\sinh(at)$	$\frac{a}{s^2 - a^2}$
$k$	$\frac{k}{s}$	$\cosh(at)$	$\frac{s}{s^2 - a^2}$
$t$	$\frac{1}{s^2}$	$\sin(at)$	$\frac{a}{s^2 + a^2}$
$t^n$	$\frac{n!}{s^{n+1}}$	$\cos(at)$	$\frac{s}{s^2 + a^2}$
$e^{-at}$	$\frac{1}{s + a}$	$e^{-at} \sin(bt)$	$\frac{b}{(s + a)^2 + b^2}$
$te^{-at}$	$\frac{1}{(s + a)^2}$	$e^{-at} \cos(bt)$	$\frac{s + a}{(s + a)^2 + b^2}$
$t^n e^{-at}$	$\frac{n!}{(s + a)^{n+1}}$	$\frac{1}{b - a} (e^{-at} - e^{-bt})$	$\frac{1}{(s + a)(s + b)}$
$\frac{1}{\sqrt{\pi t}}$	$\frac{1}{\sqrt{s}}$		



## 2.4 Løsning af differentialligninger ved Laplacetransformation

Vi vil nu gennemgå teknikken for løsning af en ordinær differentialligning v.h.a. Laplacetransformation. Proceduren kan opdeles i følgende tre trin:

- 1) Differentialligningens enkelte led transformeres og begyndelses-værdier indsættes,
- 2) den transformerede til den afhængige variable isoleres,
- 3) løsningen transformeres tilbage til tidsområdet.

### 2.4.1 Løsning af 1. ordens differentialligning

Som eksempel tages en simpel 1. ordens differentialligning hvor løsningsfunktionen kendes i forvejen:

$$\tau \frac{dy(t)}{dt} + y(t) = Kf(t) \quad \text{med begyndelsesbetingelsen } y(0) = y_0 \quad (2.4.1 - 1)$$

hvor  $\tau$  er en karakteristisk tidskonstant og  $K$  en konstant.

Påvirkningsfunktionen  $f(t)$  er et enhedsspring til tiden nul, altså  $f(t) = u(t)$ , men i de første trin af løsningsproceduren i dette eksempel vil vi af principielle grunde blot lade  $f(t)$  stå for en vilkårlig funktion.

Differentialligningen Laplacetransformeres v.h.a. regnereglerne i tabel 2.3.1-1 (trin 1)

$$\tau L\left\{\frac{dy(t)}{dt}\right\} + L\{y(t)\} = KL\{f(t)\}$$

$$\tau(sY(s) - y_0) + Y(s) = KF(s)$$

Den transformerede  $Y(s)$  kan nu isoleres (trin 2)

$$Y(s) = \frac{K}{\tau s + 1} F(s) + \frac{\tau y_0}{\tau s + 1} \quad (2.4.1 - 2)$$

I princippet udtrykker højre side af (2.4.1-2) den Laplacetransformerede løsning til differentialligningen (2.4.1-1). Denne har således samme form, uanset hvilken funktion  $f(t)$  der påvirker systemet, med et karakteristisk nævnerpolynomium der alene afhænger af differentialligningens venstre side.

Det er nu nødvendigt at indsætte den Laplacetransformerede til påvirkningen, der i dette eksempel er  $f(t) = u(t)$  hvorfor  $F(s) = 1/s$

$$Y(s) = \frac{K}{s(\tau s + 1)} + \frac{\tau y_0}{\tau s + 1} \quad (2.4.1 - 3)$$

Inden tilbagetransformationen til tidsområdet kan foretages (trin 3), må de enkelte brøker i (2.4.1-3) bringes på en form, så de alle kan findes i tabellen over Laplacetransformerede funktioner (tabel 2.3.1-1). Specielt må brøker, der indeholder operatoren  $s$  i højere orden end første, dekomponeres til så lav orden som muligt gennem en partialbrøkdudvikling.

Første led i (2.4.1-3) omskrives på følgende måde:

$$\frac{1}{s(\tau s + 1)} = \frac{A_1}{s} + \frac{A_2}{\tau s + 1} = \frac{1}{s} - \frac{\tau}{\tau s + 1} = \frac{1}{s} - \frac{1}{s + \frac{1}{\tau}}$$

(2.4.1-3) kan herefter skrives på formen

$$Y(s) = K\left(\frac{1}{s} - \frac{1}{s + \frac{1}{\tau}}\right) + \frac{y_0}{s + \frac{1}{\tau}} \quad (2.4.1 - 4)$$

Hvert led i (2.4.1-4) transformeres nu tilbage v.h.a. tabellen, således at løsningen bliver

$$y(t) = K(1 - e^{-\frac{t}{\tau}}) + y_0 e^{-\frac{t}{\tau}} \quad (2.4.1 - 5)$$

hvilket er identisk med den løsning der findes efter (2.2.1-4).

**Eksempel 2.4.1-1.** Bestem løsningen til differentialligningen (2.4.1-1) for  $f(t) = \Delta \sin(\omega t)$  når begyndelsesbetingelsen er  $y(0) = 0$ . Vinkelfrekvensen  $\omega$  er givet ved  $\omega = 2\pi/t_p$ , hvor  $t_p$  er svingningstiden, og  $\Delta$  er svingningens amplitude.

**Løsning:** Påvirkningen  $f(t)$  Laplacetransformeres og indsættes i (2.4.1-2) hvilket giver

$$Y(s) = \frac{K}{\tau s + 1} \frac{\omega}{s^2 + \omega^2} \Delta = K\Delta\omega \frac{1}{(\tau s + 1)(s - i\omega)(s + i\omega)}$$

Udtrykket dekomponeres i partialbrøker af formen

$$Y(s) = K\Delta\omega \left( \frac{A_1}{\tau s + 1} + \frac{A_{21}}{s - i\omega} + \frac{A_{22}}{s + i\omega} \right)$$

Konstanterne A i partialbrøkerne er bestemt ved

$$A_1 = \frac{1}{(-\frac{1}{\tau} - i\omega)(-\frac{1}{\tau} + i\omega)} = \frac{1}{(\frac{1}{\tau})^2 + \omega^2} = \frac{\tau^2}{1 + (\omega\tau)^2}$$

$$A_{21} = \frac{1}{(i\omega\tau + 1)2i\omega} = \frac{1}{2i\omega} \frac{1 - i\omega\tau}{1 + (\omega\tau)^2} = \frac{1}{2i\omega} \frac{1}{\sqrt{1 + (\omega\tau)^2}} e^{i\delta_1} \quad \text{hvor } \delta_1 = \arctg(-\omega\tau)$$

$$A_{22} = \frac{1}{(-i\omega\tau + 1)(-2i\omega)} = -\frac{1}{2i\omega} \frac{1 + i\omega\tau}{1 + (\omega\tau)^2} = -\frac{1}{2i\omega} \frac{1}{\sqrt{1 + (\omega\tau)^2}} e^{i\delta_2} \quad \text{hvor } \delta_2 = \arctg(\omega\tau)$$

Sættes  $\delta_1 = \arctg(-\omega\tau) = \varphi$  bliver  $\delta_2 = -\arctg(-\omega\tau) = -\varphi$  og den transformerede til  $Y(s)$  får da følgende form:

$$Y(s) = K\Delta \left( \frac{\omega\tau^2}{1 + (\omega\tau)^2} \frac{1}{\tau s + 1} + \frac{1}{2i} \frac{1}{\sqrt{1 + (\omega\tau)^2}} \left( e^{i\varphi} \frac{1}{s - i\omega} - e^{-i\varphi} \frac{1}{s + i\omega} \right) \right)$$

Herefter kan de enkelte led tilbagetransformeres, hvilket giver:

$$y(t) = K\Delta \frac{\omega\tau}{1 + (\omega\tau)^2} e^{-\frac{t}{\tau}} + \frac{K\Delta}{\sqrt{1 + (\omega\tau)^2}} \frac{1}{2i} (e^{i\varphi} e^{i\omega t} - e^{-i\varphi} e^{-i\omega t})$$

$$y(t) = K\Delta \frac{\omega\tau}{1 + (\omega\tau)^2} e^{-\frac{t}{\tau}} + \frac{K\Delta}{\sqrt{1 + (\omega\tau)^2}} \frac{1}{2i} (e^{i(\omega t + \varphi)} - e^{-i(\omega t + \varphi)})$$

$$y(t) = K\Delta \frac{\omega\tau}{1 + (\omega\tau)^2} e^{-\frac{t}{\tau}} + \frac{K\Delta}{\sqrt{1 + (\omega\tau)^2}} \sin(\omega t + \varphi) \quad \text{hvor } \varphi = \arctg(-\omega\tau)$$

Det er karakteristisk, at løsningen består af to dele:  $y(t) = y_{\text{trans}} + y_{\text{per}}$  hvor det første *transiente* led dør ud med tiden (virkningen er forsvundet efter en tid på 4 – 5 gange tidskonstanten  $\tau$ ) mens det andet *periodestationære* led fortsætter med at svinge, så længe  $f(t)$  påvirker systemet, og svingningerne har samme vinkelfrekvens  $\omega$  som påvirkningen.

Udgangssvingningens amplitude er ændret i forhold til påvirkningens amplitude  $\Delta$  og *amplitudeforholdet* AR er

$$AR = \frac{K}{\sqrt{1 + (\omega\tau)^2}} \quad (2.4.1 - 6)$$

Udgangssvingningen er også *faseforskydning* med vinklen  $\varphi$  i forhold til påvirkningen, hvilket svarer til en tidsmæssig forskydning på  $t_0 = \varphi/\omega$ . Faseforskydningen er

$$\varphi = \arctg(-\omega\tau) = -\arctg(\omega\tau) \quad \text{eller tidsforskydning } t_0 = \frac{\varphi}{\omega} = \frac{\varphi}{2\pi} t_p \quad (2.4.1 - 7)$$

Da faseforskydningen i dette tilfælde er negativ, er udgangssvingningen forsinket i forhold til påvirkningen.

Af (2.4.1-6 og 7) ses at jo hurtigere påvirkningen svinger d.v.s. jo større vinkelfrekvens  $\omega$  eller jo mindre periodetid  $t_p$  des mere *dæmpes* udgangssvingningens amplitud og des mere faseforskydes svingningen. Samme virkning har systemets tidskonstant  $\tau$ , idet jo større denne er des mere dæmpes og faseforskydes udgangssvingningen i forhold til indgangssvingningen. Af (2.4.1-7) ses at faseforskydningen i dette tilfælde højst kan blive  $\pi/2$  svarende til en tidsforskydning på  $1/4$  af svingningens periodetid  $t_p$ .

Indsvingningsforløbet for  $y(t)$  er optegnet i nedenstående figur 2.4.1-1 med følgende talværdier indsat:

$K = 1$ ,  $\tau = 10$  tidsenheder,  $\Delta = 1$  og  $\omega = 0.1$  (rad/tidsenhed) svarende til en periodetid på  $t_p = 2\pi/\omega = 20\pi$  tidsenheder.

Med  $\omega\tau = 1$  er koefficienterne i ligningen for  $y(t)$  hurtigt bestemt, og faseforskydningen er  $\varphi = -\arctg(1) = -\pi/4$ .

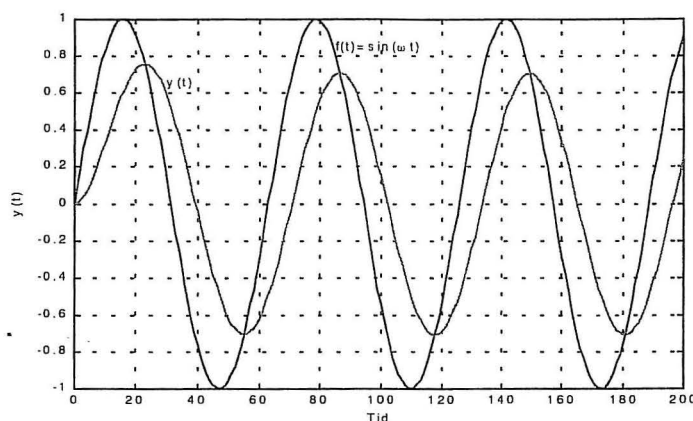
I MATLAB-notation ser beregningerne ud som følger:

```
w = 0.1; T = 10; t = 0:200;
```

```
f = sin(w*t);
```

```
y = (1/2)*exp(-t/T)+(1/sqrt(2))*sin(w*t-pi/4);
```

```
plot(t,f,t,y), grid
```



Figur 2.4.1-1. Sinusrespons for et førsteordens system.

...

## 2.4.2 Sammenfatning

Med udgangspunkt i den generelle  $n$ . ordens ordinære differentialligning angivet i (2.2.4-1)

$$\frac{d^n y(t)}{dt^n} + p_{n-1} \frac{d^{n-1} y(t)}{dt^{n-1}} + \dots + p_1 \frac{dy(t)}{dt} + p_0 y(t) = q_n \frac{d^n f(t)}{dt^n} + \dots + q_1 \frac{df(t)}{dt} + q_0 f(t) \quad (2.2.4 - 1)$$

vil vi nu forudsætte, at alle begyndelsesværdier er nul d.v.s.

$$y^{(n-1)}(0) = \dots = y'(0) = y(0) = 0 \quad \text{og} \quad f^{(n-1)}(0) = \dots = f'(0) = f(0) = 0$$

Herefter kan (2.2.4-1) Laplacetransformeres og løses med hensyn til  $Y(s)$  hvilket giver

$$Y(s) = \frac{q_n s^n + \dots + q_1 s + q_0}{s^n + p_{n-1} s^{n-1} + \dots + p_1 s + p_0} F(s) = H(s) F(s) \quad (2.4.2 - 1)$$

hvor  $H(s)$  er en karakteristisk funktion af Laplaceoperatoren  $s$ , der alene er bestemt ud fra koefficienterne i differentialligningen (2.2.4-1).  $H(s)$  spiller en væsentlig rolle inden for reguleringsteorien, idet denne på entydig måde karakteriserer systemets dynamiske egenskaber, uanset hvilken påvirkning  $F(s)$  der virker på systemet.  $H(s)$  kaldes systemets **overføringsfunktion** men bemærk, at denne betegnelse kun anvendes i tilfælde hvor alle begyndelsesværdier er sat til nul.

Indsættes  $F(s)$  i (2.4.2-1), hvor  $F(s)$  for almindelige funktioner også udgør en polynomiebrøk, haves den transformerede til løsningen, og der kan transformeres tilbage til tidsområdet. Problemet med at anvende Laplacetransformation til løsning af differentialligninger fremgår klart af (2.4.2-1) hvor man ender med en bruden rational funktion, der må opspaltes i simple brøker, for at tidsfunktionen kan findes i tabel 2.3.1-1. Metoder til denne dekomponering fremgår af det følgende afsnit.

## 2.5 Tilbage transformation. Partialbrøkd udvikling

I mange tilfælde er det muligt at få en første bedømmelse af et dynamisk systems opførsel alene ud fra kendskabet til systemets karakteristiske overføringsfunktion i Laplaceområdet, men den fulde fysiske forståelse af systemets reaktion opnås sædvanligvis først når responsen transformeres tilbage til tidsområdet. Denne tilbage transformation betegnes ofte ved:

$$L^{-1}\{F(s)\} = f(t)$$

Hvis den transformerede  $F(s)$  fremgår af tabel 2.3.1-1, er det en enkel sag at foretage tilbage transformationen, men er dette ikke tilfældet, er det nødvendigt at dekomponere  $F(s)$  til så simple udtryk, at de kan findes i tabellen. Der må foretages en partialbrøkd udvikling.

### 2.5.1 Partialbrøkd udvikling

Normalt vil  $F(s)$  fremstå som en bruden rational funktion i Laplaceoperatoren  $s$

$$Y(s) = \frac{B(s)}{A(s)} = \frac{b_m s^m + \dots + b_1 s + b_0}{s^n + a_{n-1} s^{n-1} + \dots + a_1 s + a_0} \quad (2.5.1 - 1)$$

Hvis tællerpolynomiets grad  $m = n$  kan der fraspaltes en konstant ( $b_m$ ) ved division, men for de fleste fysiske systemer er  $n > m$  hvilket forudsættes i det følgende.

Nævnerpolynomiet bringes på faktorform ved at bestemme de  $n$  rødder (poler) der er i ligningen  $A(s) = 0$ . Det erindres at der altid er  $n$  rødder i et  $n$ . grads polynomium, reelle og/eller komplekse, og hvis der er komplekse rødder, forekommer de altid parvis konjugerede. En rod kan endvidere forekomme som  $q$ -dobbelt rod. Betegnes rødderne med  $p_i$  kan  $A(s)$  princippielt bringes på formen

$$A(s) = (s - p)^q (s - p_1)(s - p_2) \dots (s - p_{n-q}) \quad (2.5.1 - 2)$$

og polynomiebrøken (2.5.1-1) kan da opspaltes på følgende måde

$$\frac{B(s)}{A(s)} = \frac{C_1}{s - p} + \dots + \frac{C_q}{(s - p)^q} + \frac{K_1}{s - p_1} + \frac{K_2}{s - p_2} + \dots + \frac{K_{n-q}}{s - p_{n-q}} \quad (2.5.1 - 3)$$

hvor  $C$ 'erne og  $K$ 'erne er konstanter.

Konstanterne  $C$  og  $K$  (residualerne) bestemmes på følgende måde:

**Ved flerdobbelt rod**

$$C_q = \lim_{s \rightarrow p} [(s - p)^q \frac{B(s)}{A(s)}] \quad (2.5.1 - 4)$$

$$C_{q-k} = \lim_{s \rightarrow p} \left[ \frac{1}{k!} \frac{d^k}{ds^k} [(s - p)^q \frac{B(s)}{A(s)}] \right] \quad \text{for } k = 1, \dots, (q - 1) \quad (2.5.1 - 5)$$

de enkelte led transformeres tilbage efter tabel 2.3.1-1 og giver

$$L^{-1}\left\{\frac{C_m}{(s-p)^m}\right\} = C_m \frac{1}{(m-1)!} t^{m-1} e^{pt} \quad \text{for } m = 1, \dots, q$$

**Ved enkeltrødder**

$$K_j = \lim_{s \rightarrow p_j} \left[ (s - p_j) \frac{B(s)}{A(s)} \right] \quad (2.5.1-6)$$

Transformerer disse led tilbage fås

$$L^{-1}\left\{\frac{K_j}{s-p_j}\right\} = K_j e^{p_j t}$$

**Ved komplekse rødder** bestemmes konstanterne som ved enkeltrødder. Konstanterne er også komplekse og parvis konjugerede som rødderne. Hvis rødderne er  $p_{k1} = \alpha + i\beta$  og  $p_{k2} = \alpha - i\beta$  giver (2.5.1-6)

$$K_{k1} = \frac{B(\alpha + i\beta)}{[\alpha + i\beta - (\alpha - i\beta)]A_R(\alpha + i\beta)} = \frac{1}{2i} \frac{1}{\beta} \frac{B(\alpha + i\beta)}{A_R(\alpha + i\beta)} = \frac{1}{2i} \frac{1}{\beta} M e^{i\delta}$$

$$K_{k2} = \frac{B(\alpha - i\beta)}{[\alpha - i\beta - (\alpha + i\beta)]A_R(\alpha - i\beta)} = -\frac{1}{2i} \frac{1}{\beta} \frac{B(\alpha - i\beta)}{A_R(\alpha - i\beta)} = -\frac{1}{2i} \frac{1}{\beta} M e^{-i\delta}$$

hvor

$$M = \left| \frac{B(\alpha + i\beta)}{A_R(\alpha + i\beta)} \right| = \left| \frac{B(\alpha - i\beta)}{A_R(\alpha - i\beta)} \right| \quad \text{og} \quad \delta = \arg\left(\frac{B(\alpha + i\beta)}{A_R(\alpha + i\beta)}\right) = -\arg\left(\frac{B(\alpha - i\beta)}{A_R(\alpha - i\beta)}\right)$$

Transformerer disse to led tilbage til tidsområdet fås

$$\frac{1}{2i} \frac{1}{\beta} M e^{i\delta} e^{(\alpha + i\beta)t} - \frac{1}{2i} \frac{1}{\beta} M e^{-i\delta} e^{(\alpha - i\beta)t} =$$

$$\frac{1}{\beta} M e^{\alpha t} \frac{1}{2i} (e^{i(\beta t + \delta)} - e^{-i(\beta t + \delta)}) = \frac{1}{\beta} M e^{\alpha t} \sin(\beta t + \delta)$$

De komplekse rødder giver således anledning til et svingende led.

**Eksempel 2.5.1-1.** Bestem tidsfunktionen til den transformerede

$$Y(s) = \frac{11s + 28}{(s + 2)^2 (s + 5)}$$

**Løsning:** Det ses umiddelbart at  $s = -2$  er dobbeltrod, og  $s = -5$  er enkeltrod.  $Y(s)$  opspaltes efter (2.5.1-3) hvilket giver



$$Y(s) = \frac{11s + 28}{(s+2)^2(s+5)} = \frac{C_1}{s+2} + \frac{C_2}{(s+2)^2} + \frac{K_1}{s+5}$$

Herefter bestemmes koefficienterne

$$C_2 = \lim_{s \rightarrow -2} \left[ \frac{11s + 28}{s+5} \right] = 2$$

$$C_1 = \lim_{s \rightarrow -2} \left[ \frac{d}{ds} \left( \frac{11s + 28}{s+5} \right) \right] = \lim_{s \rightarrow -2} \left[ \frac{(s+5)11 - (11s+28)}{(s+5)^2} \right] = 3$$

$$K_1 = \lim_{s \rightarrow -5} \left[ \frac{11s + 28}{(s+2)^2} \right] = -3$$

Vi har dermed

$$Y(s) = \frac{3}{s+2} + \frac{2}{(s+2)^2} - \frac{3}{s+5}$$

hvor hvert enkelt led nu kan tilbagetransformeres til

$$y(t) = 3e^{-2t} + 2te^{-2t} - 3e^{-5t} = (3 + 2t)e^{-2t} - 3e^{-5t}$$

Partialbrøkd udviklingen kan foretages i MATLAB med funktionen *residue* (se appendiks 1), hvor tæller- og nævnerpolynomiernes koefficienter skal angives på formen (2.5.1-1). Multiplikation af to polynomier kan foretages med funktionen *conv*. Beregningsgangen for ovenstående eksempel ser da således ud:

`A = conv([1 2],[1 2])` multiplikation af  $(s+2)(s+2)$

`A = 1 4 4`

`A = conv(A,[1 5])` faktor  $(s+5)$  ganges på

`A = 1 9 24 20` koefficienterne i  $A(s)$

`[r,p] = residue([11 28],A)`

Vektor *r* indeholder konstanterne (residualerne) i partialbrøkd udviklingen og vektor *p* indeholder polerne (rødderne i  $A(s)$ )

<code>r =</code>	<code>p =</code>
-3.0000 (= $K_3$ )	-5.0000
3.0000 (= $C_1$ )	-2.0000
2.0000 (= $C_2$ )	-2.0000

Ved dobbeltrødder kommer koefficienterne i stigende orden.

Der fås naturligvis de samme rødder og partialbrøkskoefficienter som tidligere fundet.

...

## 2.6 Numerisk løsning

I mange tilfælde er de matematiske modeller så komplicerede, at analytiske løsninger bliver meget besværlige at arbejde med, eller der skal findes løsninger for påvirkninger, der ikke kan beskrives analytisk på rimelig enkel måde, hvorfor det er ønskeligt, at løsningen kan findes gennem edb-beregninger. Men dette kan naturligvis kun lade sig gøre, hvis vi går over til numerisk løsning eller en numerisk simulering af det dynamiske system.

Al numerisk simulering bygger på at differentialligningen omskrives til en differensligning, hvilket først og fremmest betyder, at vi kun får oplysninger om løsningen til forud valgte tidspunkter, altså at tiden diskretiseres.

Vi skal nu se, at denne proces altid kan føres tilbage til løsning af et sæt af 1. ordens differentialligninger.

### 2.6.1 Numerisk løsning af 1. ordens differentialligning

Der tages udgangspunkt i en almindelig 1. ordens differentialligning med konstante koefficienter

$$x'(t) = ax(t) + bf(t) \quad (2.6.1 - 1)$$

med begyndelsesværdien  $x(t_0)$  for  $t = t_0$ .

Den sædvanlige løsningsprocedure følges hvor  $ax(t)$  trækkes over på venstre side og der multipliceres med  $\exp(-at)$ , hvilket giver

$$e^{-at} x'(t) - ae^{-at} x(t) = e^{-at} bf(t)$$

eller

$$\frac{d}{dt}(e^{-at} x(t)) = e^{-at} bf(t)$$

der multipliceres med  $dt$  og integreres bestemt mellem grænserne  $t_0$  og  $t$

$$\int_{t_0}^t \frac{d}{d\lambda}(e^{-a\lambda} x(\lambda)) d\lambda = \int_{t_0}^t e^{-a\lambda} bf(\lambda) d\lambda$$

Integralet på venstre side udregnes og grænserne indsættes

$$e^{-at} x(t) - e^{-at_0} x(t_0) = \int_{t_0}^t e^{-a\lambda} bf(\lambda) d\lambda$$

Der ganges igennem med  $\exp(at)$  hvilket giver den almindelige løsningsformel

$$x(t) = e^{a(t-t_0)} x(t_0) + \int_{t_0}^t e^{a(t-\lambda)} bf(\lambda) d\lambda \quad (2.6.1 - 2)$$

Diskretiseres tiden ved at sætte  $t_0 = k\Delta t$  og  $t = (k+1)\Delta t$  for  $k = 0, 1, 2, \dots$  fås ved indsættelse i (2.6.1-2)

$$x_{k+1} = e^{a\Delta t} x_k + \int_{k\Delta t}^{(k+1)\Delta t} e^{a((k+1)\Delta t - \lambda)} b f(\lambda) d\lambda$$

Forudsættes nu at  $f(\lambda) = f(k\Delta t) = f_k$  for  $k\Delta t < \lambda < (k+1)\Delta t$ , altså at påvirkningen holdes konstant over tidsskridtet  $\Delta t$ , og sættes  $\mu = (k+1)\Delta t - \lambda$  hvorved  $d\mu = -d\lambda$  fås

$$x_{k+1} = e^{a\Delta t} x_k + \left( \int_0^{\Delta t} e^{a\mu} d\mu \right) b f_k \quad (2.6.1-3)$$

Udregnes integralet fås endeligt

$$x_{k+1} = e^{a\Delta t} x_k - \frac{1}{a} (1 - e^{a\Delta t}) b f_k \quad (2.6.1-4)$$

Denne ligning muliggør således en skridtvis beregning af  $x$  for hvert tidsinterval  $\Delta t$ , når der startes med en kendt værdi af  $x$  fra det foregående tidspunkt og belastningen  $f$  indsættes med en konstant værdi over tidsintervallet. Konstanten  $a$  er i øvrigt lig  $-1/\tau$ , hvor  $\tau$  er den karakteristiske tidskonstant.

Med ligning (2.6.1-4) haves en differensligning til numerisk simulering af den ordinære 1. ordens differentialligning (2.6.1-1).

Det skal bemærkes, at der findes en række andre metoder til opstilling af numeriske løsningsmetoder for 1. ordens differentialligninger end den ovenfor beskrevne. Som eksempel kan nævnes det tilfælde, hvor  $\exp(a\Delta t)$  i (2.6.1-4) udvikles efter en Taylor-række, hvor kun de første led medtages, altså  $\exp(a\Delta t) \approx 1 + a\Delta t$ , hvilket giver

$$x_{k+1} = (1 + a\Delta t) x_k + \Delta t b f_k \quad (2.6.1-5)$$

hvilket vil svare til, at differentialkvotienten i (2.6.1-1) erstattes med en differenskvotient

$$\frac{x_{k+1} - x_k}{\Delta t} = a x_k + b f_k \quad (2.6.1-6)$$

Ligning (2.6.1-6) anvendes ofte til diskretisering af en differentialligning da den hurtigt fører til løsningsligningen (2.6.1-5), men beregningsnøjagtigheden er mindre end for (2.6.1-4) på grund af rækkeudviklingen, hvilket betyder at valget af diskretiseringstiden  $\Delta t$  er kritisk. Diskretiseringstiden bør altid vælges passende lille, uanset hvilken numerisk metode der anvendes, men i (2.6.1-5) går det helt galt hvis  $a\Delta t < -1$ , d.v.s hvis  $\Delta t/\tau > 1$ , idet løsningsfunktionen  $x$  så vil give sig til at svinge. Løsningen er *numerisk ustabil*. Dette problem kan ikke opstå i (2.6.1-4), hvorfor den numeriske stabilitet er knyttet til diskretiseringsmetoden.

## 2.6.2 Løsning af højere ordens differentialligning

Det er tidligere vist (se afsnit 2.2.4), at en højere ordens differentialligning kan udtrykkes ved et sæt samhørende 1. ordens differentialligninger

$$\mathbf{x}' = \mathbf{Ax} + \mathbf{bf}(t) \quad (2.2.4-2)$$

$$y = \mathbf{c}^T \mathbf{x} + df(t) \quad (2.2.4 - 3)$$

Her konstateres en stor formel lighed mellem (2.2.4-2) og den i forrige afsnit behandlede 1. ordens differentialligning (2.6.1-1), og det vil jo være elegant hvis den samme løsningsmetode kan anvendes. Dette vil kræve eksistensen af en matrixeksponentialfunktion af formen  $\exp(\mathbf{A}t)$  med samme egenskaber som den skalare eksponentialfunktion  $\exp(at)$ .

En sådan funktion kan, for en kvadratisk matrix  $\mathbf{A}$ , opstilles gennem følgende definitions-ligning

$$e^{\mathbf{A}t} = \mathbf{I} + \mathbf{A}t + \frac{1}{2!} \mathbf{A}^2 t^2 + \frac{1}{3!} \mathbf{A}^3 t^3 + \dots \quad (2.6.2 - 1)$$

hvor  $\mathbf{I}$  er identitetsmatricen.

$\exp(\mathbf{A}t)$  er en kvadratisk matrice med samme dimension som  $\mathbf{A}$ , og da (2.6.2-1) har samme form som Taylorrækken for den almindelige  $\exp(at)$ , er det let at vise, at matrixeksponentialfunktionen har samme egenskaber som  $\exp(at)$ , men de sædvanlige regneregler for matricer skal naturligvis overholdes.

På denne baggrund, og med de samme forudsætninger, kan løsningsformlerne (2.6.1-3 og 4) direkte anvendes ved løsningen af et sæt samhørende 1. ordens differential-ligninger under følgende form

$$\mathbf{x}_{k+1} = e^{\mathbf{A}\Delta t} \mathbf{x}_k + \left( \int_0^{\Delta t} e^{\mathbf{A}\mu} d\mu \right) \mathbf{b}f_k \quad (2.6.2 - 2)$$

$$\mathbf{x}_{k+1} = e^{\mathbf{A}\Delta t} \mathbf{x}_k - \mathbf{A}^{-1} (\mathbf{I} - e^{\mathbf{A}\Delta t}) \mathbf{b}f_k \quad (2.6.2 - 3)$$

Den endelige løsning til differentialligningen findes ved at indsætte (2.6.2-3) i (2.2.4-3), der umiddelbart kan diskretiseres

$$y_k = \mathbf{c}^T \mathbf{x}_k + d \cdot f_k \quad (2.6.2 - 4)$$

Ligningerne (2.6.2-3 og 4) er grundlag for MATLAB's simuleringrutiner som *step* og *lsim* (se appendiks 1), hvor den første funktion anvendes til simulering af et system påvirket af et enhedsspring, og den anden funktion anvendes når påvirkningen er en vilkårlig funktion. Matrixeksponentialfunktionen beregnes af rutinen *expm* men kun undtagelsesvis på grundlag af definitions-ligningen (2.6.2-1), idet mere effektive metoder baseret på matricen  $\mathbf{A}$ 's egenverdier og egenvektorer kan anvendes.

## Kapitel 3 REGULERINGSKREDSEN

### Reguleringskredsens opbygning

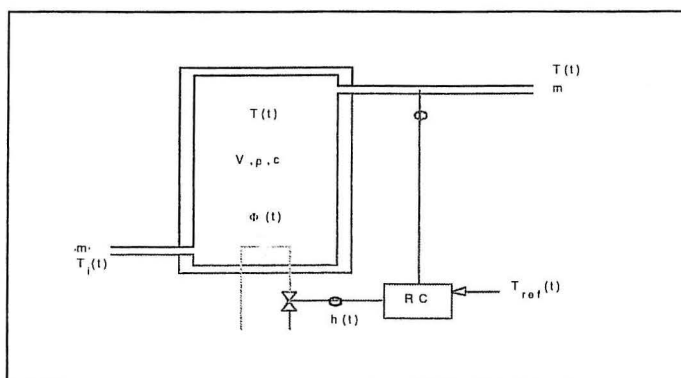
### Blokdiagrammer

## 3.1 Overføringsfunktioner

Vi har nu introduceret de fleste af de matematiske værktøjer der kræves til en teoretisk analyse af reguleringssystemer, og vi kan herefter vende os mod selve reguleringssystemet og dets virkemåde. Der tages udgangspunkt i et simpelt system der beskrives matematisk fra grunden og derigennem indføres reguleringskredsens enkelte bestanddele.

### 3.1.1 Reguleringsobjektet

Vi tager udgangspunkt i en beholder til opvarmning af vand som skitseret i nedenstående figur 3.1.1-1.



Figur 3.1.1-1. Opvarmingsbeholder med reguleringsudstyr.

Beholderen gennemstrømmes af en konstant vandmængde  $m$  med tilgangstemperaturen  $T_i(t)$ . Varmespiralen afgiver effekten  $\Phi(t)$  hvorved vandet opvarmes til temperaturen  $T(t)$ , som antages at være i hele beholderen og således også på vandstrømmen der forlader beholderen. Afgangstemperaturen ønskes holdt konstant.

Tanken med dens vandindhold er reguleringsobjektet og afgangstemperaturen er den regulerede størrelse. Varmeafgivelsen fra varmespiralen eller rettere ventilstillingen, der bestemmer varmeafgivelsens størrelse, er den styrbare størrelse. Alle andre påvirkninger, der har indflydelse på tanktemperaturen, er **forstyrrelser** som reguleringssystemet skal søge at modvirke.

Vi opstiller først en varmebalance for beholderen og for at forenkle beregningerne en lille smule ses bort fra varmetabet til omgivelserne. Den matematiske model for dette system er analog med rummodellen, der er opstillet i afsnit 2.2.2 og kan udtrykkes ved

$$C \frac{dT(t)}{dt} = \Phi(t) + mc(T_i(t) - T(t)) \quad (3.1.1 - 1)$$

hvor beholderens varmekapacitet er  $C = \rho cV$ .

Det antages nu at systemet er i en stationær balance til tiden  $t = 0$  givet ved

$$0 = \Phi + mc(T_i - T) \quad (3.1.1 - 2)$$

Den stationære balance (3.1.1-2) fratrækkes den dynamiske balance (3.1.1-1) hvilket giver

$$C \frac{d(T(t) - T)}{dt} = (\Phi(t) - \Phi) + mc[(T_i(t) - T_i) - (T(t) - T)] \quad (3.1.1 - 3)$$

Der dannes et nyt sæt variable, der angiver afvigelser fra den stationære tilstand, ved

$$\Delta T(t) = T(t) - T, \quad \Delta T_i(t) = T_i(t) - T_i \quad \text{og} \quad \Delta \Phi(t) = \Phi(t) - \Phi \quad (3.1.1 - 4)$$

hvorved alle begyndelsestilstande bliver nul, idet fx  $\Delta T(0) = T(0) - T = T - T = 0$ .

Indsættes (3.1.1-4) fås

$$C \frac{d\Delta T(t)}{dt} = \Delta \Phi(t) + mc(\Delta T_i(t) - \Delta T(t)) \quad (3.1.1 - 5)$$

Det bemærkes at mellemregninger ikke er nødvendige, idet (3.1.1-5) direkte fremgår af (3.1.1-1) ved at erstatte alle variable med deres ændringsværdier.

Balanceligning (3.1.1-5) omordnes således at den afhængige variable står på højre side af lighedstegnet

$$\frac{C}{mc} \frac{d\Delta T(t)}{dt} + \Delta T(t) = \frac{1}{mc} \Delta \Phi(t) + \Delta T_i(t) \quad (3.1.1 - 6)$$

Ligning (3.1.1-6) forenkles ved at indføre

systemets tidskonstant  $\tau = C/mc$  og

forstærkningerne  $K_1 = 1/mc$  og  $K_2 = 1$

$$\tau \frac{d\Delta T(t)}{dt} + \Delta T(t) = K_1 \Delta \Phi(t) + K_2 \Delta T_i(t) \quad (3.1.1 - 7)$$

Systemet er, med de forudsætninger vi har gjort undervejs, karakteriseret ved en udgangsstørrelse (afhængig variabel)  $\Delta T(t)$  og to uafhængige påvirkninger (indgangsstørrelser)  $\Delta \Phi(t)$  og  $\Delta T_i(t)$ .

### 3.1.2 Overføringsfunktioner, blokke og blokdiagrammer

For på enkel måde at kunne anskueliggøre sammenhængen mellem de indgående størrelser i reguleringssystemet er det hensigtsmæssigt at anvende systemets overføringsfunktioner (se afsnit 2.4.2) samt en grafisk afbildning af disse i blokke og blokdiagrammer.

Foretages en Laplacetransformation af (3.1.1-7) fås vha tabel 2.3.1-1, idet begyndelsesbetingelserne er nul:

$$(\tau s + 1)\Delta T(s) = K_1\Delta\Phi(s) + K_2\Delta T_i(s) \quad (3.1.2 - 1)$$

Løses mht  $\Delta T(s)$  fås

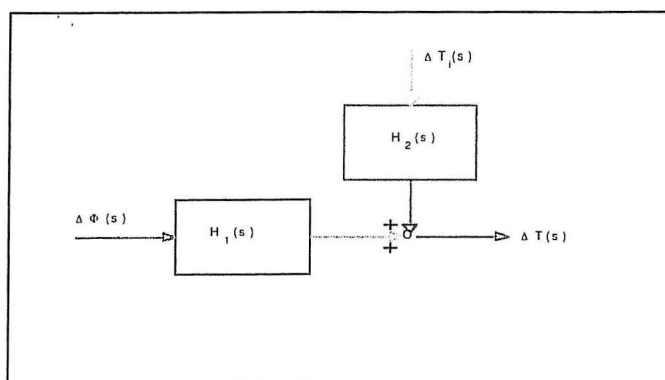
$$\Delta T(s) = \frac{K_1}{1 + \tau s}\Delta\Phi(s) + \frac{K_2}{1 + \tau s}\Delta T_i(s) \quad (3.1.2 - 2)$$

Reguleringsobjektet er således beskrevet ved to 1. ordens overføringsfunktioner

$$\frac{\Delta T(s)}{\Delta\Phi(s)} = H_1(s) = \frac{K_1}{1 + \tau s} \quad \text{eller} \quad \Delta T(s) = H_1(s) \cdot \Delta\Phi(s) \quad (3.1.2 - 3)$$

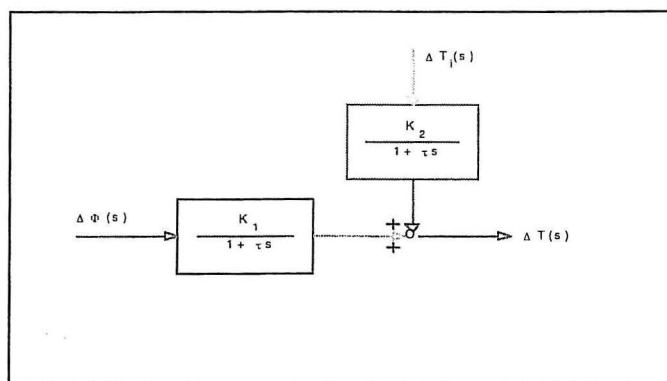
$$\frac{\Delta T(s)}{\Delta T_i(s)} = H_2(s) = \frac{K_2}{1 + \tau s} \quad \text{eller} \quad \Delta T(s) = H_2(s) \cdot \Delta T_i(s) \quad (3.1.2 - 4)$$

Indføres en blok til grafisk at symboliserer sammenhængen mellem en indgangsstørrelse og en udgangsstørrelse (i Laplaceområdet) kan (3.1.2-2) afbildes som vist i figur 3.1.2-1, hvor der foruden blokke indgår et summationspunkt



Figur 3.1.2-1. Blokke og summationspunkt.

Overføringsfunktionernes udseende kan naturligvis også indgå direkte i blokkene som vist nedenfor

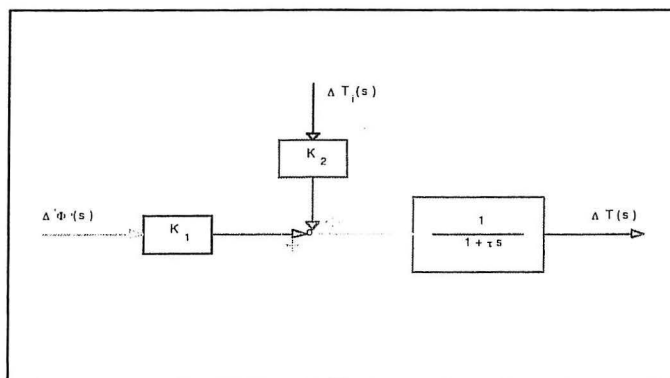


**Figur 3.1.2-2.** Blokke med overføringsfunktioner.

Ligning (3.1.2-2) kan også skrives på følgende måde

$$\Delta T(s) = \frac{1}{1 + \tau s} [K_1 \Delta \Phi(s) + K_2 \Delta T_i(s)] \quad (3.1.2 - 5)$$

hvilket giver anledning til, at blokdiagrammet i figur 3.1.2-2 også kan fremstilles som vist i figur 3.1.2-3



**Figur 3.1.2-3.** Alternativ opstilling af blokdiagram fra figur 3.1.2-2.

**Eksempel 3.1.2-1.** Bestem det tidsmæssige forløb af tanktemperaturens ændring hvis tilgangstemperaturen, i et spring til tiden nul, ændres  $\Delta T_i$  mens effekten holdes konstant ( $\Delta \Phi(t) = 0$ ).

**Løsning.** Ved anvendelse af (3.1.2-2) fås, idet den Laplacetransformerede til ændringen i tilgangstemperaturen er  $\Delta T_i(s) = \Delta T_i/s$

$$\Delta T(s) = H_2(s) \Delta T_i(s) = \frac{K_2}{1 + \tau s} \frac{\Delta T_i}{s} = K_2 \left( \frac{1}{s} - \frac{\tau}{1 + \tau s} \right) \Delta T_i$$

som tilbagetransformeret giver



$$\Delta T(t) = K_2(1 - e^{-\frac{t}{\tau}})\Delta T_i = (1 - e^{-\frac{t}{\tau}})\Delta T_i$$

Efter en tid svarende til 4 til 5 gange tidskonstanten  $\tau$  antager tanktemperaturen (uden regulering) en lige så stor ændring som tilgangstemperaturen hvis effekten ikke ændres.

...

### 3.1.3 Styreorgan – reguleringsventil

Varmespiralens effektafgivelse  $\Phi(t)$  er bestemt af reguleringsventilens stilling  $h(t)$  (åbningsgrad) og vi antager, at der gælder følgende enkle sammenhæng

$$\Phi(t) = K_v h(t) \quad \text{hvor} \quad 0 \leq h(t) \leq 1 \quad (3.1.3 - 1)$$

Hvis varmespiralens maksimale effekt er  $\Phi_{\max}$  er forstærkningen  $K_v = \Phi_{\max}$

Fratrækkes en stationær begyndelsestilstand  $\Phi = K_v h$  fås

$$\Phi(t) - \Phi = K_v (h(t) - h) \quad \Rightarrow \quad \Delta\Phi(t) = K_v \Delta h(t) \quad \text{hvor} \quad |\Delta h(t)| \leq 1$$

Laplacetransformerer fås

$$\Delta\Phi(s) = K_v \Delta h(s) \quad (3.1.3 - 2)$$

eller overføringsfunktionen

$$\frac{\Delta\Phi(s)}{\Delta h(s)} = H_v(s) = K_v = \Phi_{\max} \quad (3.1.3 - 3)$$

En overføringsfunktion af denne type kaldes et proportionalelement eller en nulte ordens overføringsfunktion.

### 3.1.4 Regulatoren

I regulatoren sammenlignes den regulerede størrelse (tanktemperaturen)  $T(t)$  med den indstillede referenceværdi (den ønskede værdi)  $T_{\text{ref}}(t)$  og fejlen  $e(t)$  dannes. Denne proces foregår i **sammenligningsudstyret** og kan beskrives ved

$$e(t) = T_{\text{ref}}(t) - T(t) \quad (3.1.4 - 1)$$

Også her dannes afvigelsen fra en stationær begyndelsestilstand

$$e(t) - e = (T_{\text{ref}}(t) - T_{\text{ref}}) - (T(t) - T)$$

eller

$$\Delta e(t) = \Delta T_{\text{ref}}(t) - \Delta T(t) \quad (3.1.4 - 2)$$

Normalt er referencen indstillet på en fast værdi ( $\Delta T_{ref}(t) = 0$ ), men virkningen af en referenceændring skal naturligvis også kunne undersøges.

Laplacetransformeres (3.1.4-2) fås

$$\Delta e(s) = \Delta T_{ref}(s) - \Delta T(s) \quad (3.1.4 - 3)$$

Dette sammenhæng kan i et blokdiagram illustreres gennem et summationspunkt.

Overføringsfunktionen for styringsudstyret, der angiver sammenhængen mellem den styrbare størrelse (ventilstillingen  $\Delta h(s)$ ) og fejlen  $\Delta e(s)$  angives ved

$$\frac{\Delta h(s)}{\Delta e(s)} = H_k(s) \quad (3.1.4 - 4)$$

Denne overføringsfunktion er helt afgørende for styringsudstyrets virkemåde, altså hvordan ventilstillingen korrigeres som følge af en konstateret afvigelse mellem den ønskede værdi og den faktiske værdi af den regulerede størrelse.

Overføringsfunktion er "indbygget" i regulatoren fra fabrikantens side og har derfor nogle på forhånd fastlagte egenskaber, men der vil være et antal parametre, der kan indstilles (vælges) af brugeren, ligesom det ofte er muligt at vælge (omstille) mellem forskellige indbyggede standardtyper af overføringsfunktioner i den samme regulator.

Vi vil her indledningsvis forudsætte, at der er et meget simpelt sammenhæng mellem ændring i fejl og ændring i ventilstilling nemlig proportionalitet, således at styringsudstyret kan karakteriseres ved følgende overføringsfunktion

$$\Delta h(s) = H_k(s) \Delta e(s) = K_k \Delta e(s) \quad (3.1.4 - 5)$$

Denne form for styring kaldes **proportionalstyring** eller kort **P-styring**. Forstærkningen  $K_k$  kan indstilles på regulatoren.

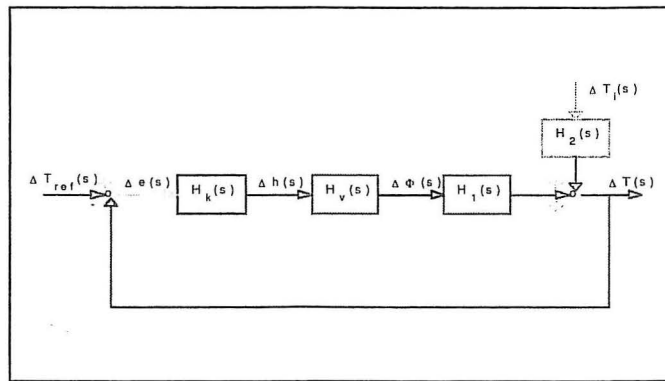
Da ventilstillingens variationsområde er begrænset til  $|\Delta h_{max}| = 1$ , vil en ændring i fejlen af størrelsen  $|\Delta e_{max}| = x_p = 1/K_k$  give maksimal ændring i den styrbare størrelse (dvs fra helt lukket ventil til helt åben ventil eller omvendt alt efter fejlens fortegn). Størrelsen  $x_p$  kaldes **proportionalbåndet** (eller P-båndet) og angives ofte i stedet for forstærkningen  $K_k = 1/x_p$ .

## 3.2 Den lukkede sløjfe

Reguleringsobjektet sammenbygges nu med styreorganet og regulatoren til **reguleringssystemet**. Reguleringssystemet udgør en lukket virkningskreds (sløjfe), idet der altid sker en tilbageføring af den målte værdi af den regulerede størrelse til sammenligning med referencen.

### 3.2.1 Reguleringskredsen

Reguleringskredsen består nu af følgende overføringsfunktioner og blokke (idet der ses bort fra dynamikken i måleelementet (føleren), der behandles efterfølgende)



**Figur 3.2.1-1.** Blokdiagram for reguleringskredsen.

Blokdiagrammet viser således symbolsk sammenhængen mellem alle indgående størrelser i reguleringskredsen. Ud over de tidligere indførte blokke og summationspunkter er der indført et afgrænsningspunkt, hvor den regulerede størrelse  $\Delta T(s)$  uændret føres tilbage til sammenligningspunktet (negativ tilbageføring) hvor fejlen dannes.

Det er karakteristisk, at blokdiagrammet altid har en udgangsstørrelse nemlig den regulerede størrelse, og at der er et antal indgangsstørrelser, der altid omfatter referencen og en eller flere forstyrrelser.

Den regulerede størrelse kan nu bestemmes ved at opskrive sammenhængen mellem de indgående størrelser, som det fremgår af blokdiagrammet

$$\Delta T(s) = H_2(s)\Delta T_i(s) + H_1(s)\Delta \Phi(s)$$

$$\Delta T(s) = H_2(s)\Delta T_i(s) + H_1(s)H_v(s)\Delta h(s)$$

$$\Delta T(s) = H_2(s)\Delta T_i(s) + H_1(s)H_v(s)H_k(s)\Delta e(s)$$

$$\Delta T(s) = H_2(s)\Delta T_i(s) + H_1(s)H_v(s)H_k(s)(\Delta T_{ref}(s) - \Delta T(s))$$

Samles led med  $\Delta T(s)$  fås

$$(1 + H_1(s)H_v(s)H_k(s))\Delta T(s) = H_2(s)\Delta T_i(s) + H_1(s)H_v(s)H_k(s)\Delta T_{ref}(s)$$

og løses sluttelig mht den regulerede størrelse fås

$$\Delta T(s) = \frac{H_2(s)}{1 + H_k(s)H_v(s)H_1(s)} \Delta T_i(s) + \frac{H_k(s)H_v(s)H_1(s)}{1 + H_k(s)H_v(s)H_1(s)} \Delta T_{ref}(s) \quad (3.2.1 - 1)$$

Ligning (3.2.1-1) beskriver således hvordan den samlede virkning af reguleringsystemet er. Det første led viser hvordan en ændring i forstyrrelsen overføres til den regulerede størrelse, mens det andet led viser en referenceændrings virkning på den regulerede størrelse. (3.2.1-1) kan kort sammenfattes i følgende symbolske skrivemåde

$$\Delta T(s) = H_{o2}(s)\Delta T_i(s) + H_{o1}(s)\Delta T_{ref}(s) \quad (3.2.1 - 2)$$

der viser, at ændringer i den regulerede størrelse  $\Delta T(s)$  kan udtrykkes ved to nye overføringsfunktioner  $H_o(s)$ , der beskriver den samlede virkning af reguleringssystemet. Disse karakteristiske overføringsfunktioner kaldes **lukketsløjefunktioner**.

Af (3.2.1-1) fremgår, at lukketsløjefunktionerne for et bestemt reguleringssystem har samme nævner, hvilket giver anledning til indførelsen af endnu en karakteristisk overføringsfunktion, nemlig **åbensløjefunktionen**

$$G(s) = H_k(s)H_v(s)H_1(s) \quad (3.2.1 - 3)$$

der er produktet af alle overføringsfunktioner en gang rundt i den lukkede sløjfe.

Når blokdiagrammet for reguleringsskredsen er optegnet med de indgående overføringsfunktioner, kan lukketsløjefunktionen mellem en indgangsstørrelse og en udgangsstørrelse meget nemt findes af følgende sætning:

*Lukketsløjefunktionen mellem en indgangsstørrelse og en udgangsstørrelse er produktet af overføringsfunktionerne den direkte vej mellem indgangs- og udgangsstørrelse, divideret med  $1 + \text{åbensløjefunktionen}$ .*

### 3.2.2 Reguleringssystemets virkning

Vi kan nu indføre de tidligere definerede overføringsfunktioner for tanktemperaturreguleringssystemet i (3.2.1-1) og opstille systemets to lukketsløjefunktioner.

Reguleringsobjektets overføringsfunktioner

$$\frac{\Delta T(s)}{\Delta \Phi(s)} = H_1(s) = \frac{K_1}{1 + \tau s} \quad \text{eller} \quad \Delta T(s) = H_1(s) \cdot \Delta \Phi(s) \quad (3.1.2 - 3)$$

$$\frac{\Delta T(s)}{\Delta T_i(s)} = H_2(s) = \frac{K_2}{1 + \tau s} \quad \text{eller} \quad \Delta T(s) = H_2(s) \cdot \Delta T_i(s) \quad (3.1.2 - 4)$$

Styreorganets overføringsfunktion

$$\frac{\Delta \Phi(s)}{\Delta h(s)} = H_v(s) = K_v = \Phi_{\max} \quad (3.1.3 - 3)$$

og endelig overføringsfunktionen for styringsudstyret

$$\Delta h(s) = H_k(s) \Delta e(s) = K_k \Delta e(s) \quad (3.1.4 - 5)$$

Lukketsløjefunktionen mellem forstyrrelsen og den regulerede størrelse bliver da

$$\frac{\Delta T(s)}{\Delta T_i(s)} = H_{o2}(s) = \frac{H_2(s)}{1 + H_k(s)H_v(s)H_1(s)} = \frac{\frac{K_2}{1 + \tau s}}{1 + K_k K_v \frac{K_1}{1 + \tau s}}$$

der efter reduktion giver

$$H_{o2}(s) = \frac{K_2}{1 + K_k K_v K_1} \frac{1}{1 + \tau_o s} \quad \text{hvor} \quad \tau_o = \frac{\tau}{1 + K_k K_v K_1} \quad (3.2.2 - 1)$$

På tilsvarende måde fås lukketsløjfefunktionen mellem referencen og den regulerede størrelse

$$H_{o1}(s) = \frac{K_k K_v K_1}{1 + K_k K_v K_1} \frac{1}{1 + \tau_o s} \quad \text{hvor} \quad \tau_o = \frac{\tau}{1 + K_k K_v K_1} \quad (3.2.2 - 2)$$

Vi bemærker straks, at lukketsløjfefunktionerne (i det aktuelle tilfælde) er af 1. orden ligesom reguleringsobjektets overføringsfunktioner, samt at systemets tidskonstant  $\tau_o$  er mindre i det regulerede system end i det uregulerede. Reguleringen bevirker således, at indsvingningen efter en ændring foregår hurtigere end i systemet uden regulering.

Anvendes slutværdisætningen (se tabel 2.3.1-1) når påvirkningen er en springvis ændring i tilgangstemperaturen af størrelsen  $\Delta T_i$  fås

$$\Delta T(\infty) = \lim_{s \rightarrow 0} (s H_{o2}(s) \frac{\Delta T_i}{s}) = \frac{K_2}{1 + K_k K_v K_1} \Delta T_i \quad (3.2.2 - 3)$$

Ved sammenligning med eksempel 3.1.2-1 ses at tanktemperaturens ændring er en faktor  $\frac{1}{1 + K_k K_v K_1}$  mindre end i tanken uden regulering. Produktet  $K_k K_v K_1$  kaldes **sløjfeforstærkningen**, og jo større denne vælges jo mindre bliver denne **belastningsafvigelse**, og jo hurtigere bliver indsvingningsforløbet, idet systemets tidskonstant også bliver mindre (se (3.2.2-1)).

Ændres referencen i et spring af størrelsen  $\Delta T_{ref}$  bliver slutværdien

$$\Delta T(\infty) = \frac{K_k K_v K_1}{1 + K_k K_v K_1} \Delta T_{ref}$$

Ideelt set burde tanktemperaturen ændre sig lige så meget som referencen ændres, men da dette åbenbart ikke er tilfældet i et system med P-styring, defineres systemets offset ved

$$offset = \Delta T_{ref} - \frac{K_k K_v K_1}{1 + K_k K_v K_1} \Delta T_{ref} = \frac{1}{1 + K_k K_v K_1} \Delta T_{ref} \quad (3.2.2 - 4)$$

Igen ses at jo større sløjfeforstærkningen er, jo mindre bliver offset. Sløjfeforstærkningen bliver stor, hvis styrsudstyrets forstærkning  $K_k$  indstilles på en stor værdi eller, hvilket er det samme, hvis p-båndet  $x_p$  indstilles til en lille værdi ( $x_p = 1/K_k$ ).

**Eksempel 3.2.2-1.** Optegn indsvingningsforløbet for tanktemperaturen såvel med som uden regulering samt ændringen i ventilstillingen  $\Delta h(t)$  ved en springvis ændring i tilgangstemperaturen af størrelsen  $\Delta T_i$ . Der anvendes følgende talværdier:

tankens tidskonstant  $\tau = 600$  sec,

sløjfeforstærkningen  $K_k K_v K_1 = 5$  hvoraf  $K_k = 0,12$  [ventilændring/°C] og

tilgangstemperaturens ændring  $\Delta T_i = 1$  °C.

**Løsning.** Den uregulerede tanktemperaturs indsvingningsforløb er tidligere bestemt i eksempel 3.1.2-1 på grundlag af overføringsfunktionen

$$\frac{\Delta T(s)}{\Delta T_i(s)} = H_2(s) = \frac{K_2}{1 + \tau s} \quad \text{eller} \quad \Delta T(s) = H_2(s) \cdot \Delta T_i(s) \quad (3.1.2 - 4)$$

Der med indsatte talværdier giver

$$\Delta T_{ur}(s) = \frac{1}{1 + 600s} \Delta T_i(s)$$

Når reguleringen er i drift bestemmes indsvingningsforløbet af (3.2.2-1) og indsættes talværdier fås

$$\Delta T(s) = \frac{1}{6} \frac{1}{1 + 100s} \Delta T_i(s)$$

Endelig findes overføringsfunktionen mellem forstyrrelsen (indgangsstørrelse) og ventilstillingen (udgangsstørrelse) ved at anvende sætningen om lukketsløjfer i forbindelse med figur 3.2.1-1 til

$$\Delta h(s) = - \frac{H_2(s)H_k(s)}{1 + G(s)} = - \frac{K_k K_2}{1 + K_k K_v K_1} \frac{1}{1 + \tau_o s} \Delta T_i(s)$$

Bemærk minustegnet der kommer fra tilbageføringen til summationspunktet. Indsættes de givne talværdier fås

$$\Delta h(s) = - \frac{0,12}{6} \frac{1}{1 + \tau_o s} \Delta T_i(s)$$

Alle overføringsfunktionerne i dette eksempel er af samme type, hvorfor den analytiske løsning kan findes som angivet i eksempel 3.1.2-1

$$\Delta T_{ur}(t) = K_2 (1 - e^{-\frac{t}{\tau}}) \Delta T_i = (1 - e^{-\frac{t}{\tau}}) \Delta T_i$$

$$\Delta T(t) = \frac{K_2}{1 + K_k K_v K_1} (1 - e^{-\frac{t}{\tau_o}}) \Delta T_i = \frac{1}{6} (1 - e^{-\frac{t}{\tau_o}}) \Delta T_i$$

$$\Delta h(t) = - \frac{K_k K_2}{1 + K_k K_v K_1} (1 - e^{-\frac{t}{\tau_o}}) \Delta T_i = - \frac{0,12}{6} (1 - e^{-\frac{t}{\tau_o}}) \Delta T_i$$

Indsvingningsforløbene kan direkte simuleres ved anvendelse af MATLAB-proceduren *step* (se appendiks 1) og beregningerne forløber på følgende måde

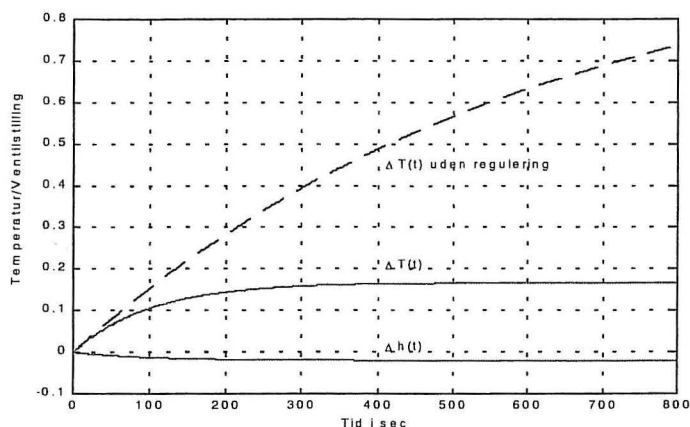
t = 0:800; % der defineres en tidsakse

DTur = step([1],[600 1],t);

DT = step([1/6],[100 1],t);

Dh = step([-0.12/6],[100 1],t);

plot(t,DTur,'--',t,DT,t,Dh), grid



Figur 3.2.2-1. Indsvingningsforløb for tankreguleringssystem.

...

### 3.3 Systemer af 2. orden

Efter at have introduceret den generelle procedure til analyse af den lukkede reguleringskreds vil vi nu øge kompleksiteten af den lukkede sløjfe ved at tilføje dynamikken i måleelementet og se, at systemets reaktion herved kan ændres radikalt i forhold til det tidligere eksempel.

#### 3.3.1 Måleelement i tilbageføringen

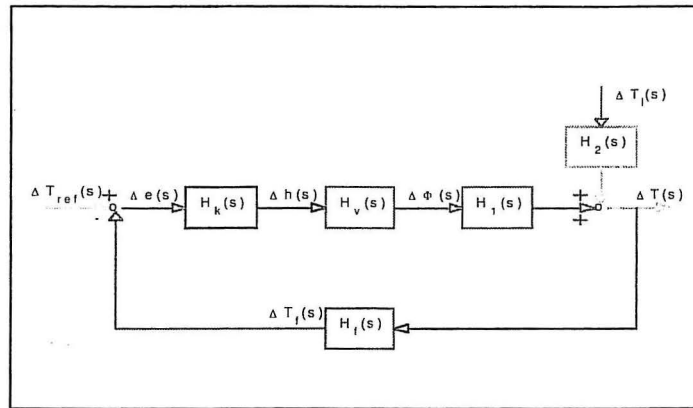
Ved den hidtidige behandlingen af tanktemperaturreguleringssystemet vist på figur 3.1.1-1 er der set bort fra dynamikken i føleren, der måler tanktemperaturen, men det antages nu, at dette element dynamisk set kan beskrives med et tidskonstantelement.

Følerens overføringsfunktion fås ved Laplacetransformation af (2.2.1-3) og er således

$$H_f(s) = \frac{\Delta T_f(s)}{\Delta T(s)} = \frac{K_f}{1 + \tau_f s} \quad (3.3.1 - 1)$$

hvor forstærkningen er  $K_f = 1$  og følerens tidskonstant  $\tau_f$ .

Blokdiagrammet i figur 3.2.1-1 udbygges herefter med blokken for følerens overføringsfunktion der placeres i tilbageføringen som vist nedenfor



**Figur 3.3.1-1.** Blokdiagram med måleelement i tilbageføringen.

Reguleringssystemets åbensløjfefunktion er nu

$$G(s) = H_k(s)H_v(s)H_1(s)H_f(s) \quad (3.3.1 - 2)$$

og lukketsløjfefunktionerne bestemmes analogt med (3.2.1-1) vha sløjfesætningen.

Lukketsløjfefunktionen mellem forstyrrelse og reguleret størrelse er, med de samme forudsætninger som tidligere for de øvrige indgående overføringsfunktioner,

$$\frac{\Delta T(s)}{\Delta T_i(s)} = H_{o2}(s) = \frac{H_2(s)}{1 + H_k(s)H_v(s)H_1(s)H_f(s)} = \frac{\frac{K_2}{1 + \tau s}}{1 + K_k K_v \frac{K_1}{1 + \tau s} \frac{K_f}{1 + \tau_f s}}$$

som efter reduktion giver

$$H_{o2}(s) = \frac{K_2}{1 + K_o} \frac{1 + \tau_f s}{\frac{\tau \tau_f}{1 + K_o} s^2 + \frac{\tau + \tau_f}{1 + K_o} s + 1} \quad (3.3.1 - 3)$$

hvor sløjfeforstærkningen er  $K_o = K_k K_v K_1 K_f$ .

Tilsvarende er lukketsløjfefunktionen mellem reference og reguleret størrelse

$$H_{o1}(s) = \frac{K_k K_v K_1}{1 + K_o} \frac{1 + \tau_f s}{\frac{\tau \tau_f}{1 + K_o} s^2 + \frac{\tau + \tau_f}{1 + K_o} s + 1} \quad (3.3.1 - 4)$$

Begge lukketsløjfefunktioner er nu af 2. orden, og ved anvendelse af slutværdisætningen efter en springvis ændring i indgangsstørrelserne fås samme slutværdi som angivet i (3.2.2-3) og (3.2.2-4), idet sløjfeforstærkningen er ens i de to tilfælde, da  $K_f = 1$ . Forskellen ligger i det tidsmæssige forløb af indsvingningerne.



### 3.3.2 Det generelle 2. ordens system

Da de to lukketsløjfefunktioner (3.3.1-3) og (3.3.1-4) er ens på nær en proportionalitetskonstant behandles de efterfølgende under et. Nævneren bringes på den standardform der anvendes i forbindelse med 2. ordens overføringsfunktioner

$$\Delta T(s) = C \frac{1 + \tau_f s}{\frac{1}{\omega_n^2} s^2 + \frac{2\xi}{\omega_n} s + 1} \Delta x(s) = C \frac{\omega_n^2 (1 + \tau_f s)}{s^2 + 2\xi \omega_n s + \omega_n^2} \Delta x(s) \quad (3.3.2 - 1)$$

hvor  $\omega_n$  kaldes den normerede eller naturlige vinkelfrekvens og  $\xi$  kaldes dæmpningsforholdet eller dæmpningsfaktoren.

I det aktuelle tilfælde er  $\omega_n$  og  $\xi$  bestemt ved følgende udtryk

$$\omega_n = \sqrt{\frac{1 + K_o}{\tau \tau_f}} \quad (3.3.2 - 2)$$

$$\frac{2\xi}{\omega_n} = \frac{\tau + \tau_f}{1 + K_o} \Rightarrow \xi = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\frac{\tau}{\tau_f} + 2 + \frac{\tau_f}{\tau}}{1 + K_o}} \quad (3.3.2 - 3)$$

Dæmpningsfaktoren afhænger dels af det aktuelle anlægs parametre, hvilket kommer til udtryk ved forholdet mellem de indgående tidskonstanter, og dels af indstillingen af regulatoren, da sløjfforstærkningen  $K_o$  indgår.

Proportionalitetsfaktoren  $C$  fremgår direkte af (3.3.1-3 eller -4) alt efter om påvirkningen  $\Delta x(s)$  er en ændring i tilgangstemperaturen eller en referenceændring.

Systemets respons på et enhedsspring  $\Delta x(s) = \Delta x/s$  undersøges herefter.

$$\Delta T(s) = C \frac{\omega_n^2 (1 + \tau_f s)}{(s^2 + 2\xi \omega_n s + \omega_n^2)} \frac{\Delta x}{s} = C \frac{\omega_n^2 (1 + \tau_f s)}{(s - p_1)(s - p_2)s} \Delta x \quad (3.3.2 - 4)$$

hvor  $p_1$  og  $p_2$  er rødderne i nævnerens 2. grads led

$$p_1, p_2 = \omega_n (-\xi \pm \sqrt{\xi^2 - 1}) \quad (3.3.2 - 5)$$

Alt efter størrelsen af dæmpningsfaktoren  $\xi$  forekommer et af følgende tre tilfælde:

**Tilfælde 1)** :  $\xi > 1$  systemet kaldes **overdæmpet**, der er to reelle negative rødder.

Ved en partialbrøksudvikling af (3.3.2-4) fås

$$\Delta T(s) = C \left( \frac{1}{s} + \frac{A_1}{s - p_1} + \frac{A_2}{s - p_2} \right) \Delta x \quad (3.3.2 - 6)$$

hvor

$$A_1 = \frac{(1 + \tau_f p_1) p_2}{p_1 - p_2} \quad \text{og} \quad A_2 = -\frac{(1 + \tau_f p_2) p_1}{p_1 - p_2} \quad (3.3.2 - 7)$$

Transformeres tilbage til tidsområdet fås

$$\Delta T(t) = C(1 + A_1 e^{p_1 t} + A_2 e^{p_2 t}) \Delta x \quad (3.3.2 - 8)$$

**Tilfælde 2)** :  $\zeta = 1$  systemet kaldes **kritisk dæmpet**, der er to sammenfaldende negative rødder  $p = p_1 = p_2 = -\omega_n$ .

Partialbrøksudviklingen giver

$$\Delta T(s) = C\left(\frac{1}{s} + \frac{A_1}{s-p} + \frac{A_2}{(s-p)^2}\right) \Delta x \quad (3.3.2 - 9)$$

hvor

$$A_1 = -1 \quad \text{og} \quad A_2 = (1 + \tau_f p)p = -(1 - \tau_f \omega_n)\omega_n \quad (3.3.2 - 10)$$

der transformeret tilbage til tidsområdet giver

$$\Delta T(t) = C(1 - (1 + (1 - \tau_f \omega_n)\omega_n t)e^{-\omega_n t}) \Delta x \quad (3.3.2 - 11)$$

**Tilfælde 3)** :  $0 \leq \zeta < 1$  systemet kaldes **underdæmpet**, der er to komplekse rødder med negativ realdel

$$p_1, p_2 = \omega_n(-\zeta \pm i\sqrt{1-\zeta^2}) \quad (3.3.2 - 12)$$

Partialbrøksudviklingen forløber som i tilfælde 1) og giver

$$\Delta T(s) = C\left(\frac{1}{s} + \frac{A_1}{s-p_1} + \frac{A_2}{s-p_2}\right) \Delta x \quad (3.3.2 - 13)$$

hvor

$$A_1 = \frac{(1 + \tau_f p_1)p_2}{p_1 - p_2} = \frac{1}{2i} M e^{-i\varphi} \quad (3.3.2 - 14a)$$

$$A_2 = \frac{(1 + \tau_f p_2)p_1}{p_1 - p_2} = -\frac{1}{2i} M e^{i\varphi} \quad (3.3.2 - 14b)$$

med

$$M = \frac{\sqrt{(\tau_f \omega_n - \zeta)^2 + (\sqrt{1-\zeta^2})^2}}{\sqrt{1-\zeta^2}} \quad \text{og} \quad \varphi = \arctg\left(\frac{\sqrt{1-\zeta^2}}{\tau_f \omega_n - \zeta}\right) \quad (3.3.2 - 14c)$$

Herefter kan (3.3.2-13) transformeres tilbage til tidsområdet og der fås

$$\Delta T(t) = C\left[1 + \frac{1}{2i} M e^{-i\varphi} e^{\omega_n(-\zeta + i\sqrt{1-\zeta^2})t} - \frac{1}{2i} M e^{i\varphi} e^{\omega_n(-\zeta - i\sqrt{1-\zeta^2})t}\right] \Delta x \quad (3.3.2 - 15)$$

hvilket kan omskrives til

$$\Delta T(t) = C[1 + Me^{-\zeta\omega_n t} \sin(\omega_n t \sqrt{1 - \zeta^2} - \varphi)]\Delta x \quad (3.3.2 - 16)$$

Indsvingningsforløbet har nu ændret karakter i forhold til de to tidligere tilfælde, idet funktionen (3.3.2-16) kan antage værdier, der er større end slutværdien  $\Delta T(\infty) = C\Delta x$ . Indsvingningen i det underdæmpede tilfælde forløber *oscillerende*, men er dog altid begrænset af indhyllingskurverne  $C(1 \pm M \exp(-\zeta\omega_n t))\Delta x$ .

Det oscillerende indsvingningsforløb kan fx karakteriseres ved:

*opvoksningstiden* der er tiden indtil slutværdien nås første gang, eller

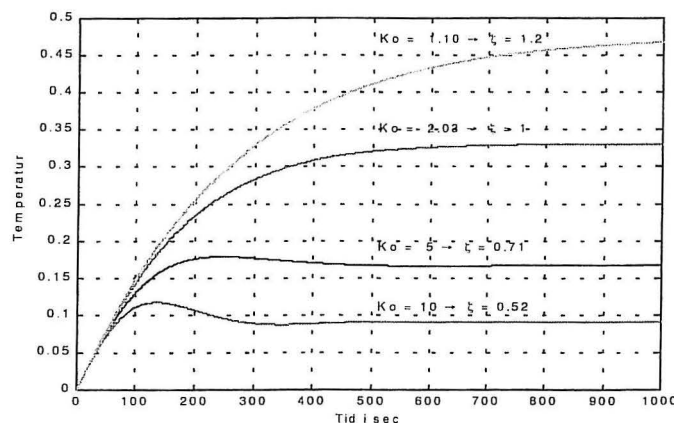
*indsvingningstiden* ("settling time") der er den tid, det tager trinresponsen at falde så meget til ro, at udsvingene er kommet under en vis tolerance, fx  $\pm 5\%$  eller  $\pm 1\%$  af slutværdien.

Jo mindre dæmpningsfaktoren  $\zeta$  er, jo mindre er opvoksningstiden men des større bliver oversvingene og dermed også indsvingningstiden.

**Eksempel 3.3.2-1.** Tanksystemet der er beskrevet i eksempel 3.2.2-1 forsynes med en temperaturføler med tidskonstanten  $\tau_f = 60$  sec. Simuler indsvingningsforløbet ved en springvis ændring af tilgangstemperaturen på  $\Delta T_i = 1$  °C, når sløjfeforstærkningen er hhv  $K_o = 5, 10, 2.025$  og  $1.107$ .

**Løsning.** Simuleringen foretages direkte med MATLAB-proceduren `step` idet der opskrives følgende beregningssekvens

```
to = 600;          % Tankens tidskonstant
tf = 60;           % Følerens tidskonstant
t = 0:1000;        % Tidsakse
Ko = 5;            % Sløjfeforstærkningen. Følgende beregninger gentages for hver Ko
wn = sqrt((1+Ko)/(to*tf));          % (3.3.2-2)
z = 0.5*sqrt((to/tf+2+tf/to)/(1+Ko)); % (3.3.2-3)
C = 1/(1+Ko);                % (3.3.1-3)
num = conv([C*wn^2],[tf 1]);      % (3.3.2-1) Tæller
den = [1 2*z*wn wn^2];            % (3.3.2-1) Nævner
T = step(num, den, t);            % Simulering
plot(t, T), grid
```

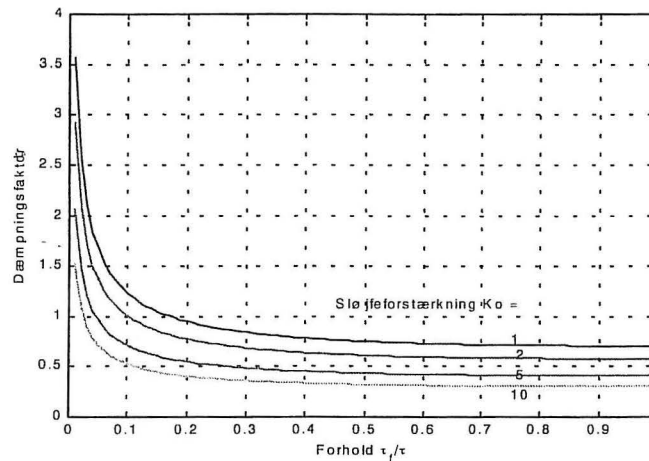


Figur 3.3.2-1. Indsvingningsforløb for 2. ordens tankreguleringssystem.

Det ses at jo større sløjfeforstærkningen  $K_0$  er, jo mindre er dæmpningsfaktoren  $\zeta$  og jo mere uroligt bliver indsvingningsforløbet. Af hensyn til en acceptabel statisk nøjagtighed er det nødvendigt at sløjfeforstærkningen  $K_0$  mindst er 4 - 5, som altså i dette tilfælde giver et underdæmpet system. Svingningerne dør dog meget hurtigt ud i det aktuelle tilfælde.

...

I det her gennemgåede eksempel med tanktemperaturreguleringssystemet er dæmpningsfaktoren bestemt af forholdet mellem de indgående tidskonstanter og af sløjfeforstærkningen som angivet i (3.3.2-3). Dette sammenhæng er vist i nedenstående figur



Figur 3.3.2-2. Dæmpningsfaktor  $\zeta$  som funktion af  $\tau_f/\tau$ .

Det ses heraf at føletidskonstanten skal være meget mindre end tankens tidskonstant for ikke at få et underdæmpet system.

# Kapitel 4 REGULERINGSSYSTEMETS EGENSKABER

Styringsudstyr med P-, I- og D-virkning

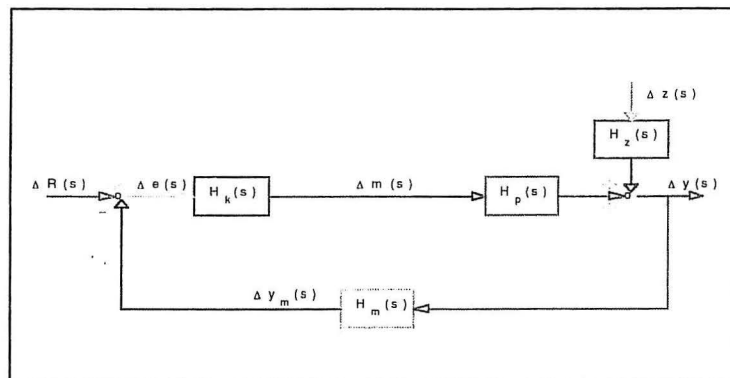
Transient respons

## 4.1 Reguleringskredsens elementer

Efter kapitel 3's indledende beskrivelse af reguleringskredsens opbygning og virkning i et tilfælde der er knyttet til en bestemt reguleringsopgave med anvendelse af den mest simple form for styring, nemlig proportionalstyring, vil vi nu generalisere reguleringskredsens overføringsfunktioner og introducere andre styringsformer.

### 4.1.1 Reguleringsystemets blokdiagram

Der tages udgangspunkt i et reguleringsystem med den generelle opbygning som vist på figur 4.1.1-1 nedenfor.



Figur 4.1.1-1. Reguleringsystemets blokdiagram.

Reguleringsobjektets dynamik er beskrevet gennem to overføringsfunktioner, hvor  $H_p(s)$  angiver sammenhængen mellem den styrbare størrelse  $\Delta m(s)$  og den regulerede størrelse  $\Delta y(s)$ , mens  $H_z(s)$  beskriver virkningen af en forstyrrelse  $\Delta z(s)$ . Der er kun vist en forstyrrelse men der kan naturligvis være flere påvirkninger, der indvirker på den regulerede størrelse, og disse behandles så på samme måde som  $\Delta z(s)$ .

Måleudstyret karakteriseres ved overføringsfunktionen  $H_m(s)$  og den målte størrelse  $\Delta y_m(s)$  sammenlignes med referencen  $\Delta R(s)$ . Styringsudstyrets overføringsfunktion er  $H_k(s)$ .

Der erindres om at alle variable  $\Delta x(s)$ , der indgår i blokdiagrammet, angiver ændringen fra en stationær begyndelsestilstand når der anvendes en beskrivelse med overføringsfunktioner.

Vi vil nu se på de indgående overføringsfunktioners egenskaber.

### 4.1.2 Reguleringsobjektets overføringsfunktioner

Vi vil forudsætte at alle overføringsfunktioner der indgår i beskrivelsen af reguleringsobjektet er af typen

$$\Delta u(s) = H(s)\Delta x(s) = \frac{b_m s^m + \dots + b_1 s + b_0}{s^n + \dots + a_1 s + a_0} \Delta x(s) \quad (4.1.2 - 1)$$

hvor  $\Delta u(s)$  er udgangs størrelsen og  $\Delta x(s)$  er en indgangs størrelse. Der er således tale om et fysisk system, der matematisk kan modelleres med en lineær n. ordens differentialligning.

For at få et indtryk af hvordan dette system reagerer, vil vi påvirke det med en springvis ændring i indgangs størrelsen  $\Delta x(s) = \Delta x/s$ , og anvende begyndelses- og slutværdisætningen (se tabel 2.3.1-1).

Først findes slutværdien for tiden  $t \rightarrow \infty$

$$\Delta u(\infty) = \lim_{s \rightarrow 0} (sH(s) \frac{\Delta x}{s}) = H(0)\Delta x = \frac{b_0}{a_0} \Delta x = K\Delta x \quad (4.1.2 - 2)$$

hvor K er systemets statiske forstærkning. Systemet vil således efter nogen tid antage en ny stationær tilstand, hvor udgangs størrelsen har ændret sig proportionalt med indgangs størrelsens ændring. Ved grænseovergangen er forudsat at  $a_0 \neq 0$  dvs at  $s = 0$  ikke er rod i overføringsfunktionens nævnerpolynomium. Hvis dette ikke er tilfældet, vil  $\Delta u(\infty) \rightarrow \infty$  hvilket betyder, at systemet (processen) i sig selv indeholder et integrationselement (se regnereglerne for Laplacetransformation tabel 2.3.1-1), og systemet vil ikke falde til ro før påvirkningen forsvinder eller systemets grænser overskrides, hvorved den angivne overføringsfunktion ikke længere beskriver systemets reaktion.

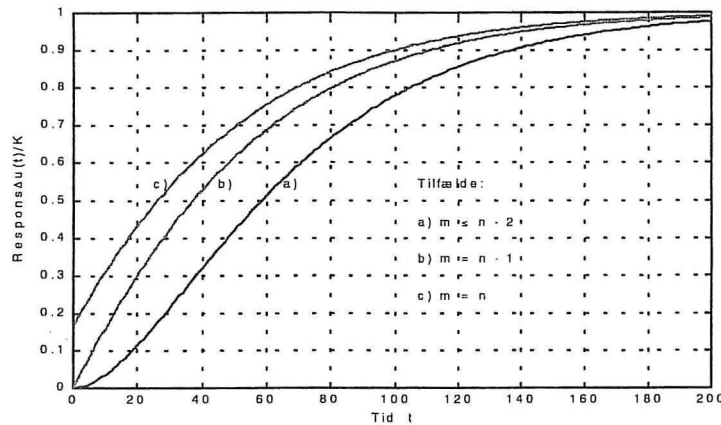
Herefter anvendes begyndelsesværdisætningen for at se, hvordan ændringen starter når tiden  $t \rightarrow 0$

$$\Delta u(0) = \lim_{s \rightarrow \infty} (sH(s) \frac{\Delta x}{s}) = \lim_{s \rightarrow \infty} \left( \frac{b_m s^{m-n} + \dots + b_0 s^{-n}}{1 + a_{n-1} s^{-1} + \dots + a_0 s^{-n}} \Delta x \right) \quad (4.1.2 - 3)$$

Der er her tre tilfælde der skal undersøges:

- 1)  $m > n$  betyder at  $\Delta u(0) \rightarrow \infty$ . Det er utænkeligt, for et virkeligt forekommende fysisk system, at en påvirkning af endelig størrelse, vil få systemet til at reagere så kraftigt lige når påvirkningen påføres. Vi kan derfor altid antage at  $m < n$ .
- 2)  $m = n$  giver  $\Delta u(0) = b_m \Delta x$ . I dette tilfælde vil udgangs størrelsen foretage et spring til begyndelsestidspunktet når den springvise påvirkning påføres. Dette vil normalt ikke forekomme i virkelige fysiske systemer, men der kan forekomme matematiske modeller med  $m = n$ , hvis der ved opstillingen er set bort fra en eller flere (små) tidskonstanter.
- 3)  $m < n$  giver  $\Delta u(0) = 0$ , hvilket er det normalt forekommende tilfælde. Hvis  $m = n - 1$  er der skrå tangent i begyndelsestidspunktet (hvilket ses af reglen for transformation af en differentialkvotient sammen med begyndelsesværdireglen), og hvis  $m \leq n - 2$  er der vandret tangent i begyndelsestidspunktet.

På grundlag af disse overvejelser er det således muligt at skitsere indsvingningsforløbet for almindeligt forekommende systemer, der beskrives ved den forudsatte type af overføringsfunktioner, som vist på figur 4.1.2-1.



**Figur 4.1.2-1.** Typisk indsvingningsforløb for reguleringsobjekt der påvirkes med et enhedsspring.

Det tidsmæssige forløb af indsvingningen efter en springvis påvirkning findes af

$$\Delta u(s) = H(s) \frac{\Delta x}{s} = \frac{b_m s^m + \dots + b_1 s + b_0}{s^n + \dots + a_1 s + a_0} \frac{\Delta x}{s} = \left[ \frac{A_0}{s} + \sum_{j=1}^n \frac{A_j}{s - p_j} \right] \Delta x \quad (4.1.2 - 4)$$

Ved dekomponeringen i (4.1.2-4) forudsættes for enkeltheds skyld at der ikke forekommer flerdobbelte poler (flerdobbelte rødder i nævnerpolynomiet). Tilbage transformation til tidsområdet giver

$$\Delta u(t) = \left[ A_0 + \sum_{j=1}^n A_j e^{p_j t} \right] \Delta x = K \left[ 1 + \sum_{j=1}^n \frac{A_j}{K} e^{p_j t} \right] \Delta x \quad \text{idet} \quad A_0 = K \quad (4.1.2 - 5)$$

Det ses heraf at polerne i reguleringsobjektets overføringsfunktion alle må være negative eller have negativ realdel, da responsen ellers vokser mod uendeligt selv for en endelig påvirkning. Residualerne  $A_j$  findes som tidligere beskrevet (afsnit 2.5).

Som det fremgår af (4.1.2-2) karakteriseres reguleringsobjektet af en lineær statisk karakteristik  $u = Kx + k_0$ , hvor forstærkningen er den konstante hældning på den statiske karakteristik. I mange tilfælde, og specielt inden for energitekniske systemer, vil der dog forekomme ulineære statiske karakteristikker, hvor  $du/dx = f'(x) = K(x)$  ikke er konstant og forstærkningen således er afhængig af arbejds punktet. I sådanne tilfælde er det nødvendigt at foretage en **linearisering** af karakteristikken, dvs at den krumme karakteristik erstattes med ligningen for tangenten i det aktuelle arbejds punkt og den dynamiske model opstilles under forudsætning af, at de variable holder sig i nærheden af dette arbejds punkt. En sådan linearisering har ikke kun indflydelse på overføringsfunktionens forstærkning men ofte også på polerne og dermed på reguleringsobjektets karakteristiske tidskonstanter ( $\tau_j = 1/p_j$ ) (se (4.1.2-4)). Gyldigheden af en analyse baseret på den lineære regulerings teori må således altid vurderes i relation til det variationsområde for de indgående variable, hvor lineariseringen er brugbar.

### 4.1.3 Måleudstyret

Overføringsfunktionen  $H_m(s)$  i figur 4.1.1-1 skal opfattes som den samlede overføringsfunktion for føler og måleværdiomsætter, men i de videre overvejelser forudsættes at den målte værdi  $\Delta y_m(s)$  har samme enhed som den regulerede størrelse  $\Delta y(s)$  for at undgå at indføre en skaleringsfaktor for måleværdiomsætningen. Dette betyder samtidig at en tilsvarende måleværdiomsætning udelades ved referencen  $\Delta R(s)$ , der således også har samme enhed som den regulerede størrelse.

Overføringsfunktionen for måleudstyret antages endvidere at kunne beskrives ved samme type som angivet i (4.1.2-1), men her må forstærkningen sættes til  $K_m = 1$ , da der ellers forekommer målefejl.

### 4.1.4 Styringsudstyret

Styringsudstyret er det centrale element i regulatoren. I regulatoren dannes fejlen ved en sammenligning mellem den indstillede referenceværdi og den målte størrelse ( $\Delta e(s) = \Delta R(s) - \Delta y_m(s)$  jf. figur 4.1.1-1), og styringsudstyret skal herefter beregne hvordan den styrbare størrelse skal ændres for at imødegå den konstaterede fejl.

I alle de foregående eksempler på reguleringssystemer er styringsudstyret beskrevet ved det simplest mulige sammenhæng mellem styrbar størrelse og fejl, nemlig proportionalitet, idet den valgte regulator har proportionalstyring eller P-styring. Denne styringsform er fyldestgørende i mange tilfælde, men i afsnit 3.2.2 konstaterede vi en karakteristisk "svaghed" ved P-styring, nemlig at der forekommer en vedblivende fejl både når forstyrrelse og referenceværdi ændres i et spring, henholdsvis en belastningsafvigelse og et offset. Størrelsen af disse afvigelser kan dog begrænses ved at øge styringsudstyrets forstærkning  $K_k$  (eller mindske proportionalbåndet  $x_p = 1/K_k$ ), men herved bliver styringsudstyrets indgreb i den styrbare størrelse kraftigere og der er en tendens til et mere uroligt indsvingningsforløb. Forstærkningen må naturligvis ikke indstilles så højt at regulatoren overreagere, med risiko for at den regulerede størrelse aldrig falder til ro selv efter en endelig påvirkning. Hvis dette sker, er reguleringssystemet **ustabilt** og i praksis ubrugeligt.

For at fastholde P-styringens gode egenskaber og samtidig mindske dens svagheder kan proportionalvirkningen udbygges med et integrationselement (I-virkning), der fjerner blivende afvigelser, og måske yderligere med et differentiationselement (D-virkning), der reagerer på fejlens ændringshastighed.

De mest almindelige styringsformer der anvendes i forbindelse med varme- og klimatekniske anlæg kan karakteriseres ved nedenstående tids- og overføringsfunktioner mellem fejlen  $\Delta e$  den styrbare størrelse  $\Delta m$ :

#### Proportionalstyring, P-styring

$$\Delta m(t) = K_k \Delta e(t) \quad (4.1.4 - 1)$$

$$H_k(s) = \frac{\Delta m(s)}{\Delta e(s)} = K_k \quad (4.1.4 - 2)$$



**Proportional-integralstyring, PI-styring**

$$\Delta m(t) = K_k (\Delta e(t) + \frac{1}{\tau_I} \int_0^t \Delta e(t) dt) \quad (4.1.4 - 3)$$

$$H_k(s) = \frac{\Delta m(s)}{\Delta e(s)} = K_k (1 + \frac{1}{\tau_I s}) = K_k (\frac{1 + \tau_I s}{\tau_I s}) \quad (4.1.4 - 4)$$

**Proportional-integral-differentialstyring, PID-styring**

$$\Delta m(t) = K_k (\Delta e(t) + \frac{1}{\tau_I} \int_0^t \Delta e(t) dt + \tau_D \frac{d\Delta e(t)}{dt}) \quad (4.1.4 - 5)$$

$$H_k(s) = \frac{\Delta m(s)}{\Delta e(s)} = K_k (1 + \frac{1}{\tau_I s} + \tau_D s) = K_k (\frac{1 + \tau_I s + \tau_I \tau_D s^2}{\tau_I s}) \quad (4.1.4 - 6)$$

Hvor styringsudstyrets parametre, der kan indstilles på regulatoren, er:

$$K_k = \text{Forstærkningen} \quad (\text{eller P - båndet } x_p = \frac{1}{K_k} \quad \text{undertiden } x_p = \frac{100\%}{K_k})$$

$\tau_I$  = Integrationstiden

$\tau_D$  = Differentiationstiden eller derivattiden

For at få et umiddelbart indtryk af forskellen mellem de tre forskellige styringsformer differentieres (4.1.4-5) og de enkelte leds betydning vurderes.

$$\frac{d\Delta m(t)}{dt} = K_k (\frac{d\Delta e(t)}{dt} + \frac{1}{\tau_I} \Delta e(t) + \tau_D \frac{d^2 \Delta e(t)}{dt^2}) \quad (4.1.4 - 7)$$

Differentialkvotienten  $d\Delta m(t)/dt$  angiver den hastighed hvormed den styrbare størrelse  $\Delta m(t)$  ændres.

Ved P-styring ændres den styrbare størrelse når fejlen ændres men den er i ro, når fejlen er konstant. Det er dette forhold, der giver anledning til belastningsafvigelse og offset.

Ved PI- og PID-styring vil den styrbare størrelse ændre sin værdi når fejlen ændres og først falde til ro, når fejlen vedblivende er nul pga. I-virkningen. D-virkningen bevirker, at den styrbare størrelse ændres kraftigt når fejlens ændringshastighed er stor men virkningen falder bort, når fejlen er konstant. PID-styring kan derfor med fordel anvendes i systemer hvor forstyrrelsen ændre sig kraftigt og hurtigt.

Af (4.1.4-3) ses at integrationstiden  $\tau_I$  er den tid, efter hvilken P-virkningen og I-virkningen har bidraget lige meget til den styrbare størrelses bevægelse, når fejlen ændres momentant (et spring fra en fast værdi til en anden).

Tilsvarende ses af (4.1.4-5) at derivattiden  $\tau_D$  er den tid, efter hvilken P-virkningen og D-virkningen har bidraget lige meget til den styrbare størrelses bevægelse, når fejlen ændres med konstant hastighed (fejlen er en rampefunktion).

De overføringsfunktioner, der er angivet for styringsudstyret i (4.1.4-1 til -6), skal opfattes som (ideelle) matematiske modeller for de fysiske komponenter, der indgår i regulatoren,

der kan være opbygget af elektroniske, pneumatiske, hydrauliske eller mekaniske komponenter, de såkaldte *analoge regulatorer*.

I *digitale regulatorer*, hvor styringen realiseres gennem en programstump i en microprocessor, skal styringsfunktionerne omformes, således at beregningen af styringsudstyrets udgangsstørrelse kan foretages på grundlag diskrete værdier af indgangsstørrelsen. Den målte værdi digitaliseres (i en analog til digital omsætter) og indlæses i processoren med et fast tidsinterval - *samplingstiden*  $\Delta t_s$  - hvilket også er tiden på to på hinanden udlæsninger og omsætning af udgangsstørrelsen.

En algoritme til en digital PID-styring kan opstilles på grundlag af det generelle udtryk for den tids-kontinuerte PID-styring

$$m(t) = K_k (e(t) + \frac{1}{\tau_I} \int_0^t e(t) dt + \tau_D \frac{de(t)}{dt})$$

ved at erstatte integralet med en sum og differentialkvotienten med en differenskvotient. Udgangsstørrelsen  $m(k)$  til tidspunktet  $t = k\Delta t_s$  kan da angives på følgende tids-diskrete form

$$m(k) = K_k (e(k) + \frac{1}{\tau_I} \sum_{j=0}^{j=k} e(j) \Delta t_s + \tau_D \frac{e(k) - e(k-1)}{\Delta t_s})$$

eller

$$m(k) = K_k e(k) + K_{kl} \sum_{j=0}^{j=k} e(j) + K_{kd} (e(k) - e(k-1))$$

Hvis den digitale regulators parametre "indstilles" gennem koefficienterne  $K_k$ ,  $K_{kl}$  og  $K_{kd}$  bliver integrations- og derivatid afhængig af samplingstiden idet

$$K_{kl} = \frac{K_k \Delta t_s}{\tau_I} \Leftrightarrow \tau_I = \frac{K_k \Delta t_s}{K_{kl}} \quad \text{og} \quad K_{kd} = \frac{K_k \tau_D}{\Delta t_s} \Leftrightarrow \tau_D = \frac{K_{kd} \Delta t_s}{K_k}$$

## 4.2 Reguleringskredsens virkning

Reguleringssystemet, der består af reguleringsobjekt og reguleringsudstyr, har til opgave at holde den regulerede størrelse på en konstant ønsket værdi uanset ændringer i belastningsforhold og andre forstyrrelser. En undersøgelse af reguleringssystemets egenskaber kan foretages ud fra systemets overføringsfunktioner, hvis egenskaber der er redegjort for i afsnit 4.1.

### 4.2.1 Den lukkede sløjfes indsvingningsforløb

Med udgangspunkt i reguleringssystemets blokdiagram som vist i figur 4.1.1-1 og sløjfesætningen (afsnit 3.2.1) opstilles lukketsløjfefunktionerne for reguleringssystemet

$$\Delta y(s) = H_{o2}(s)\Delta z(s) + H_{o1}(s)\Delta R(s) \quad (4.2.1 - 1)$$

eller

$$\Delta y(s) = \frac{H_z(s)}{1 + H_k(s)H_p(s)H_m(s)} \Delta z(s) + \frac{H_k(s)H_p(s)}{1 + H_k(s)H_p(s)H_m(s)} \Delta R(s) \quad (4.2.1 - 2)$$

Alle indgående overføringsfunktioner er af en sådan type, at de kan udtrykkes som  $H(s) = N(s)/D(s)$ , hvor  $N$  og  $D$  er konstanter eller polynomier i Laplaceoperatoren  $s$ . Indsættes dette, og udelades af bekvemmelighedsgrunde angivelsen  $(s)$  i overføringsfunktionerne, fås, idet nævnerne i reguleringsobjektets to overføringsfunktioner er ens  $D_z = D_p$

$$\Delta y(s) = \frac{\frac{N_z}{D_p}}{1 + \frac{N_k}{D_k} \frac{N_p}{D_p} \frac{N_m}{D_m}} \Delta z(s) + \frac{\frac{N_k}{D_k} \frac{N_p}{D_p}}{1 + \frac{N_k}{D_k} \frac{N_p}{D_p} \frac{N_m}{D_m}} \Delta R(s) \quad (4.2.1 - 3)$$

som efter reduktion giver

$$\Delta y(s) = \frac{D_k D_m N_z}{D_k D_p D_m + N_k N_p N_m} \Delta z(s) + \frac{D_m N_k N_p}{D_k D_p D_m + N_k N_p N_m} \Delta R(s) \quad (4.2.1 - 4)$$

Både tæller og nævner fremstår nu som polynomier i Laplaceoperatoren og de to lukket-sløjfefunktioner har således form af en bruden rational funktion.

Nævneren er den samme i alle lukket-sløjfefunktioner i et givet reguleringssystem og det samme gælder derfor også for polerne (rødderne i nævnerpolynomiet), der spiller en afgørende rolle for hvordan indsvingningsforløbet bliver. Det skal bemærkes at polerne afhænger dels af reguleringsobjektets egenskaber ( $N_p$  og  $D_p$ ) og dels af de indstillede reguleringsparametre i styringsudstyret ( $N_k$  og  $D_k$ ), dvs. at polerne i et givet system kan "flyttes" ved at ændre regulatorens indstilling.

Af (4.2.1-4) ses at anvendelse af styringsudstyr med PI- eller PID-virkning i almindelighed giver et nævnerpolynomium af højere orden end ved anvendelse af ren P-styring med deraf større mulighed for et uroligt indsvingningsforløb.

Når indsvingningsforløbet for en given påvirkning skal bestemmes, skal den Laplacetransformerede til påvirkningsfunktionen indsættes og for de funktioner vi kender, er den Laplacetransformerede også en bruden rational funktion – se tabel 2.3.1-1.

Vi har derfor en lukket-sløjfefunktion der kan angives på formen

$$\Delta y(s) = H_o(s)\Delta x(s) = \frac{N_o(s)}{D_o(s)} \Delta x(s) = \frac{N_o(s)}{(s-p)^k (s-p_1) \cdots (s-p_j)} \Delta x(s) \quad (4.2.1 - 5)$$

hvor  $\Delta x(s)$  står for en af de to påvirkninger  $\Delta z(s)$  eller  $\Delta R(s)$ . Nævnerpolynomiet er bragt på faktorform ved at bestemme polerne  $p$  (der er  $k$ -dobbel rod) og  $p_1 \dots p_j$ .  $k + j = n$  der er nævnerpolynomiets grad.

Tilsvarende kan påvirkningen udtrykkes ved

$$\Delta x(s) = \frac{N_x(s)}{D_x(s)} = \frac{N_x}{(s - q_1) \cdots (s - q_r)} \quad (4.2.1 - 6)$$

hvor nævnerpolynomiet også er bragt på faktorform efter en bestemmelse af rødderne  $q_1 \dots q_r$ .

Indsvingningsforløbet er således bestemt ved et udtryk af formen

$$\Delta y(s) = H_o(s) \Delta x(s) = \frac{N_o(s) N_x(s)}{(s - p)^k (s - p_1) \cdots (s - p_j) (s - q_1) \cdots (s - q_r)} \quad (4.2.1 - 7)$$

Foretages en partialbrøkd udvikling af (4.2.1-7) fås

$$\Delta y(s) = \frac{C_k}{(s - p)^k} + \cdots + \frac{C_1}{s - p} + \sum_{i=1}^j \frac{B_i}{s - p_i} + \sum_{m=1}^r \frac{A_m}{s - q_m} \quad (4.2.1 - 8)$$

hvor koefficienterne A, B og C kan findes ved sædvanlig teknik.

Transformeres endeligt tilbage til tidsområdet fås følgende indsvingningsforløb

$$\Delta y(t) = \frac{C_k}{(k-1)!} t^{k-1} e^{pt} + \cdots + C_1 t e^{pt} + \sum_{i=1}^j B_i e^{p_i t} + \sum_{m=1}^r A_m e^{q_m t} \quad (4.2.1 - 9)$$

Her skal straks bemærkes, at hvis blot en af eksponenterne  $p$  eller  $q$  er positiv, vil responsen vokse mod uendelig, når tiden går mod uendelig.

Hvis den positive rod stammer fra selve lukketsløjfefunktionen (altså en  $p$ -rod) siger vi, at reguleringssystemet er **ustabilt** og det er ubrugeligt i praksis, idet selv en endelig påvirkning vil resultere i, at responsen vokser ud over alle grænser. Vi kan måske ændre på responsens forløb, idet vi husker, at styringsudstyrets parametre kan indstilles (vælges) og derved kan polernes beliggenhed ændres.

Hvis den positive rod stammer fra påvirkningen (altså en  $q$ -rod), er det et udtryk for, at påvirkningen selv vokser ud over alle grænser og reguleringssystemet forsøger at følge med.

Den generelle løsning i (4.2.1-9) skal naturligvis tages med det forbehold, at der vil være nogle indbyggede grænser i systemet, der bevirker at de bestemmende differentialligninger og dermed de indgående overføringsfunktioner, ikke gælder uden for disse grænser. Systemet vil altid være ubrugeligt, når der er en positiv pol i lukketsløjfefunktionen, idet selv en nok så lille ændring i forstyrrelsen vil få den styrbare størrelse til at bevæge sig ud i en af sine yderstillinger.

Hvis lukketsløjfefunktionen har komplekse poler, er disse parvis konjugerede og vi har tidligere set (afsnit 2.5.1), at dette giver anledning til et oscillerende indsvingningsforløb, idet den tilbagetransformerede vil indeholde led af typen:

$$B_\alpha e^{\alpha t} \sin(\beta t + \delta)$$

når polen har realdelen  $\alpha$  og imaginærdelen  $\beta$ . Her ses at det også er nødvendigt, at polens realdel er negativ, da svingningerne ellers ikke dør ud med tiden.

Som en nødvendig men ikke tilstrækkelig betingelse for at et reguleringssystem er stabilt, skal følgende to kriterier være opfyldt: a) alle potenser af  $s$  fra  $s^n$  til  $s^0$  skal være til stede i en  $n$ . ordens lukketsløjfefunktionens nævnerpolynomium, og b) alle koefficienter skal have samme fortegn.

Grænseværdien af den generelle respons for  $t \rightarrow \infty$  kan naturligvis findes af (4.2.1-9) ved at gennemføre grænseovergangen, men skal her vises ved anvendelse af slutværdisætningen på (4.2.1-1) ved en springvis påvirkning  $\Delta x(s) = \Delta/s$  i hhv. forstyrrelsen  $\Delta z(s)$  og referencen  $\Delta R(s)$ .

Inden slutværdisætningen anvendes skal bemærkes, at for alle indgående overføringsfunktioner, bortset fra styringsudstyret, gælder at  $H(0) = K$ . For styringsudstyret er  $H_k(0) = K_k$  ved P-styring og  $H_k(s \rightarrow 0) \rightarrow \infty$  ved PI- og PID-styring, vi siger at PI- og PID-styringsudstyret har uendelig stor statisk forstærkning.

Slutværdien ved P-styring er

$$\Delta y(\infty) = \lim_{s \rightarrow 0} (s \Delta y(s)) = \frac{K_z}{1 + K_k K_p K_m} \Delta z + \frac{K_k K_p}{1 + K_k K_p K_m} \Delta R \quad (4.2.1-10)$$

med sløjfeforstærkningen  $K_o = K_k K_p K_m$ . Her ses den karakteristiske belastningsafvigelse og offset der kun kan mindskes ved at øge sløjfeforstærkningen.

Ved PI- og PID-styring fås (formelt)

$$\Delta y(\infty) = \frac{K_z}{1 + (\infty) K_p K_m} \Delta z + \frac{(\infty) K_p}{1 + (\infty) K_p K_m} \Delta R = 0 \Delta z + 1 \Delta R \quad (4.2.1-11)$$

PI- og PID-styringen har således den egenskab der savnes ved P-styring, at forstyrrelser efterhånden helt udreguleres og at referenceændringer antages eksakt.

Ved begge grænseovergange er det nødvendigt at forudsætte at der ikke optræder rødder i nævnerpolynomiet der er positive eller har positiv realdel, idet slutværdisætningen naturligvis ikke kan anvendes i tilfælde hvor responsen vokser ubegrænset.

**Eksempel 4.2.1.** Tanksystemet der er behandlet i eksemplerne 3.2.2-1 og 3.3.2-1 med blokdiagram vist i figur 3.3.1-1 forsynes med en regulator der kan omstilles mellem P-, PI- eller PID-styring og der skal foretages en sammenligning mellem indsvingningsforløbene for en springvis ændring i tilgangstemperaturen på  $\Delta T_i = 1^\circ\text{C}$  når der vælges følgende indstillinger af styringsudstyret:

- P-styring med  $K_k = 0,12$  ( $\Rightarrow K_v K_1 = K_p = 5/0,12$  idet  $K_m = 1$ ) hvilket er identisk med eksempel 3.3.2-1 for tilfældet med sløjfeforstærkningen  $K_o = 5$ ,
- PI-styring med  $K_k = 0,12$  og  $\tau_i = 600$  sec,
- PI-styring med  $K_k = 0,12$  og  $\tau_i = 200$  sec, og
- PID-styring med  $K_k = 0,12$  og  $\tau_i = 200$  sec samt  $\tau_D = 60$  sec.

**Løsning.** De tidligere opstillede overføringsfunktioner med tilhørende talkonstanter er

For reguleringsobjektet inkl. reguleringsventil

$$\Delta T(s) = H_p \Delta h(s) + H_z \Delta T_i(s) = \frac{K_p}{1 + \tau_p s} \Delta h(s) + \frac{K_z}{1 + \tau_p s} \Delta T_i(s)$$

hvor  $K_p = K_v K_1 = 5/0,12$ ,  $K_z = 1$  og  $\tau_p = 600$  sec.

Måleudstyrets overføringsfunktion udgøres af føleren fra eksempel 3.3.2-1

$$\Delta T_m(s) = H_m \Delta T(s) = \frac{K_m}{1 + \tau_m s} \Delta T(s)$$

med  $K_m = 1$  og  $\tau_m = \tau_f = 60$  sec.

Styringsudstyrets overføringsfunktion, her angivet som den generelle PID-styring, er

$$\Delta h(s) = H_k \Delta e(s) = K_k \frac{1 + \tau_I s + \tau_I \tau_D s^2}{\tau_I s} \Delta e(s)$$

Beregningerne gennemføres i MATLAB som angivet nedenstående

```
t = 0:1500;    % Tidsakse
```

```
tp = 600; tf = 60; Kp = 5/0.12;    % Konstanter
```

```
Tilfælde a) P-styring
```

```
Kk = 0.12;
```

```
Da = conv([tp 1],[tf 1]);    % (4.2.1-4)
```

```
Da = Da + [0 0 Kk*Kp];    % Vektorer gives samme længde
```

```
dta = step([tf 1],Da,t);    % Simulering
```

```
Tilfælde b) PI-styring
```

```
ti = 600;
```

```
Npi = conv([ti 0],[tf 1]);    % (4.2.1-4)
```

```
Dpi1 = conv(Npi,[tp 1]);
```

```
Dpi2 = Kk*Kp*[ti 1];
```

```
Dpi = Dpi1+[0 0 Dpi2];
```

```
dtb = step(Npi,Dpi,t);
```

```
Tilfælde c) som b) med ti = 200
```

```
Tilfælde d) PID-styring
```

```
ti = 200;
```

```
td = 60;
```

```
Npi = conv([ti 0],[tf 1]);
```

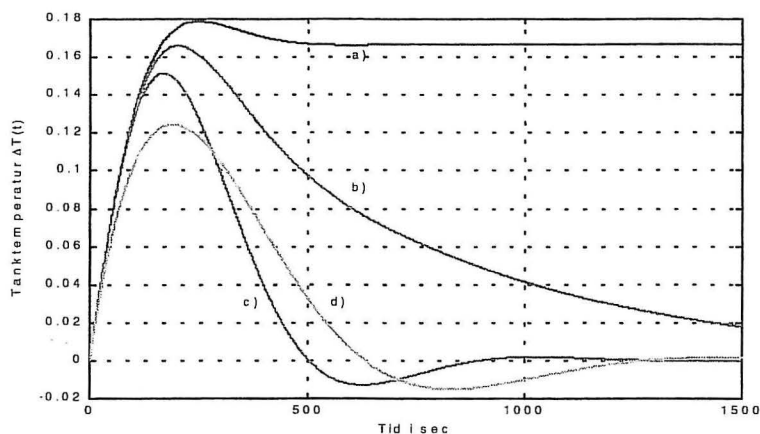
```
Dpi1 = conv(Npi,[tp 1]);
```

```
Dpi2 = Kk*Kp*[ti*td ti 1];
```

```
Dpi = Dpi1+[0 Dpi2];
```

```
dtd = step(Npi,Dpi,t);
```

```
plot(t,dta,t,dtb,t,dtc,t,dtd), grid
```



Figur 4.2.1-1. Indsvingningsforløb ved a) P-, b) og c) PI- og d) PID-styring.

I tilfælde b) er integrationstiden lige så stor som tankens tidskonstant (600 sec) hvilket giver en meget langsom udregulering af forstyrrelsens indvirken. I tilfælde c) er I-virkningen gjort kraftigere ved at mindske integrationstiden (200 sec) med deraf følgende tendens til en lidt uroligt indsvingning, der dog er meget dæmpet pga. det meget træge system der arbejdes med. I tilfælde d) med PID-styring er integrationstiden stadig 200 sec og derivattiden er 60 sec, D-virkningen gør sig gældende i begyndelsen med et kraftigere indgreb i den styrbare størrelse men har også en stabiliserende virkning på de efterfølgende svingninger i forhold til tilfælde c).

...

## 4.3 Frekvensanalyse

Gennem en frekvensanalyse kan vi foretage en undersøgelse af hvordan et dynamisk system reagere på harmonisk svingende påvirkninger. I eksempel 2.4.1-1 så vi hvorledes et 1. ordens system, der påvirkes med en sinussvingning af formen  $\Delta x(t) = \Delta x \sin(\omega t)$ , efter at de indledende transienter er døet ud, giver en respons, der også er en sinusfunktion med samme vinkelfrekvens  $\omega$  som påvirkningen:  $\Delta y(t) = \Delta y \sin(\omega t + \varphi)$ . Det er karakteristisk at responsen udviser en faseforskydning  $\varphi$  i forhold til påvirkningen, og at amplituden  $\Delta y$  er forskellig fra påvirkningens amplitude  $\Delta x$ . Både faseforskydningen  $\varphi$  og amplitudeforholdet  $\Delta y/\Delta x$  er funktioner af vinkelfrekvensen  $\omega$  og de kan på enkel måde bestemmes ud fra kendskabet til det dynamiske systems overføringsfunktion. Frekvensanalysen spiller en stor rolle inden for stabilitetsundersøgelse for reguleringssystemer men vi vil her starte med generelt at se, hvordan en overføringsfunktions reaktion er på en harmonisk svingende påvirkning.

### 4.3.1 Overføringsfunktioners sinusrespons

Vi tager udgangspunkt i et dynamisk system, der kan beskrives med en overføringsfunktion af den type, der er angivet i (4.2.1-5). Overføringsfunktionen kan således enten beskrive dynamikken i en af reguleringssystemets lukketsløjfer eller i en enkelt komponent. Overføringsfunktionen har formen

$$\Delta y(s) = H(s) \Delta x(s) = \frac{N(s)}{D(s)} \Delta x(s) = \frac{N(s)}{(s-p)^k (s-p_1) \cdots (s-p_j)} \Delta x(s) \quad (4.3.1-1)$$

Systemet påvirkes nu med en sinussvingning af formen  $\Delta x(t) = \Delta x \sin(\omega t)$  med amplituden  $\Delta x$  og vinkelfrekvensen  $\omega$ , svarende til svingningstiden  $t_p = 2\pi/\omega$ . Den Laplacetransformerende til påvirkningen er

$$\Delta x(s) = \frac{\omega}{s^2 + \omega^2} \Delta x = \frac{\omega}{(s-i\omega)(s+i\omega)} \Delta x \quad (4.3.1-2)$$

Indsvingningsforløbet kan nu bestemmes af (4.2.1-7 til -9) men vi vil her specielt bestemme de to A-koefficienter, der indgår i (4.2.1-8 og -9).

Sættes  $s = i\omega$ , der er den ene rod i påvirkningens nævnerpolynomium, fås af (4.3.1-1) efter multiplikation med  $(s - i\omega)$

$$A_1 = H(i\omega) \frac{\omega}{i\omega + i\omega} = \frac{1}{2i} H(i\omega) = \frac{1}{2i} |H(i\omega)| e^{i\varphi(\omega)} \quad (4.3.1-3)$$

Tilsvarende fås for  $s = -i\omega$

$$A_2 = H(-i\omega) \frac{\omega}{-i\omega - i\omega} = -\frac{1}{2i} H(-i\omega) = -\frac{1}{2i} |H(i\omega)| e^{-i\varphi(\omega)} \quad (4.3.1-4)$$

hvor

$$|H(i\omega)| = \text{modulus}(H(i\omega)) = \sqrt{(\text{real}(H(i\omega)))^2 + (\text{imag}(H(i\omega)))^2} \quad (4.3.1-5)$$

$$\varphi(\omega) = \text{argument}(H(i\omega)) = \arctg\left(\frac{\text{imag}(H(i\omega))}{\text{real}(H(i\omega))}\right) \quad (4.3.1-6)$$

Responsten kan herefter bestemmes af (4.2.1-9) til

$$\Delta y(t) = [\text{trans. led}] + \Delta x \left[ \frac{1}{2i} |H(i\omega)| e^{i\varphi(\omega)} e^{i\omega t} - \frac{1}{2i} |H(i\omega)| e^{-i\varphi(\omega)} e^{-i\omega t} \right] \quad (4.3.1-7)$$

$$\Delta y(t) = [\text{trans. led}] + \Delta x |H(i\omega)| \sin(\omega t + \varphi(\omega)) \quad (4.3.1-8)$$

hvor [trans. led] indeholder de led i (4.2.1-9), der har C og B-koefficienter. Hvis overføringsfunktionen  $H(s)$  er stabil, og derfor har poler  $p$  med negativ realdel, vil virkningen af disse transiente led forsvinde med tiden, og systemet vil fortsætte med at svinge periodisk med samme frekvens som påvirkningen. Denne *periodestationære* respons kan da skrives kort på formen

$$\Delta y(\omega) = \Delta x |H(i\omega)| \sin(\omega t + \varphi(\omega)) \quad (4.3.1-9)$$

Amplitudforholdet AR mellem den udgående og den indgående svingning er

$$AR = |H(i\omega)| \quad \text{eller} \quad AR = 20 \log(H(i\omega)) \quad dB \quad (4.3.1-10)$$



Faseforskydningen  $\varphi$  mellem den udgående og den indgående svingning er

$$\varphi = \arg(H(i\omega)) \quad \angle \text{grader} \quad \text{eller} \quad \text{radian} \quad (4.3.1 - 11)$$

Faseforskydningen svarer til en tidsforskydning på  $\Delta t_o(\omega) = \varphi(\omega)/\omega = \varphi(\omega)t_p/2\pi$ .

Vi bemærker, at amplitudeforholdet  $|H(i\omega)|$  og faseforskydningen  $\varphi(\omega)$  er nogle karakteristiske størrelser, der alene er bestemt gennem overføringsfunktionens parametre (og vinkelfrekvensen). Amplitudeforholdet og faseforskydningen beregnes meget enkelt ved at erstatte  $s$  i overføringsfunktionen  $H(s)$  med  $i\omega$ .

Det skal sluttelig bemærkes, at foranstående overvejelser angående et dynamisk systems sinusrespons naturligvis direkte kan overføres til det analoge tilfælde med en cosinuspåvirkning, idet sinusfunktionen i (4.3.1-9) blot erstattes med en cosinusfunktion.

### 4.3.2 Frekvenskarakteristikker

Foretages en afbildning af amplitudeforholdet  $|H(i\omega)|$  og faseforskydningen  $\varphi(\omega)$  som funktion af vinkelfrekvensen  $\omega$  fås overføringsfunktionens frekvenskarakteristikker.

Normalt anvendes en dobbeltlogaritmisk afbildning af amplitudeforholdet, idet  $AR = 20\log(|H(i\omega)|)$  dB afbildes som funktion af  $\log(\omega)$ . Betegnelsen dB (deciBell) anvendes for at gøre opmærksom på at det er et (amplitude-)forhold der afbildes. Fasevinklen angivet i grader afbildes ligeledes som funktion af  $\log(\omega)$ . Det herved fremkomne sæt af frekvenskarakteristikker kaldes et *Bodediagram*.

Den logaritmiske afbildning af amplitudeforholdet har specielt en fordel når frekvenskarakteristikkerne skal findes for et system af seriekoblede overføringsfunktioner, hvor man har

$$G(s) = H_1(s)H_2(s) \cdots H_n(s) \quad (4.3.2 - 1)$$

Erstattes  $s$  med  $i\omega$  fås

$$G(i\omega) = |G(i\omega)|e^{i\varphi(\omega)} = |H_1(i\omega)|e^{i\varphi_1(\omega)} \cdots |H_n(i\omega)|e^{i\varphi_n(\omega)} \quad (4.3.2 - 2)$$

Det resulterende amplitudeforhold er derfor bestemt ved

$$|G(i\omega)| = |H_1(i\omega)| \cdots |H_n(i\omega)| \quad (4.3.2 - 3)$$

eller

$$AR = 20\log(|G(i\omega)|) = 20\log(|H_1(i\omega)|) + \cdots + 20\log(|H_n(i\omega)|) \quad (4.3.2 - 4)$$

og fasevinklen

$$\varphi(\omega) = \varphi_1(\omega) + \dots + \varphi_n(\omega) \quad (4.3.2 - 5)$$

I et Bodediagram kan de resulterende frekvenskarakteristikker bestemmes ved grafisk summation af de enkelte overføringsfunktioners amplitude- hhv. fasekarakteristikker.

Tilsvarende vil et led af typen

$$G(s) = \frac{1}{H(s)} \Rightarrow G(i\omega) = |G(i\omega)|e^{i\varphi(\omega)} = \frac{1}{|H(i\omega)|e^{i\varphi_H(\omega)}} \quad (4.3.2 - 6)$$

have amplitudeforholdet og faseforskydningen

$$|G(i\omega)| = \frac{1}{|H(i\omega)|} \text{ eller } AR = -20 \log(|H(i\omega)|) \text{ og } \varphi(\omega) = -\varphi_H(\omega) \quad (4.3.2 - 7)$$

der i et Bodediagram giver en afbildning hvor både amplitude- og fasekarakteristik skifter fortegn i forhold til frekvenskarakteristikkerne for  $H(s)$ .

**Eksempel 4.3.2-1.** Optegn Bodediagrammet for frekvenskarakteristikkerne til en 1. ordens overføringsfunktion  $H(s) = K/(1 + \tau s)$ .

**Løsning.** Amplitudeforholdet og faseforskydningen er tidligere fundet i eksempel 2.4.1-1 til

$$AR = 20 \log\left(\frac{K}{\sqrt{1 + (\omega\tau)^2}}\right) \text{ og } \varphi(\omega) = -\arctg(\omega\tau)$$

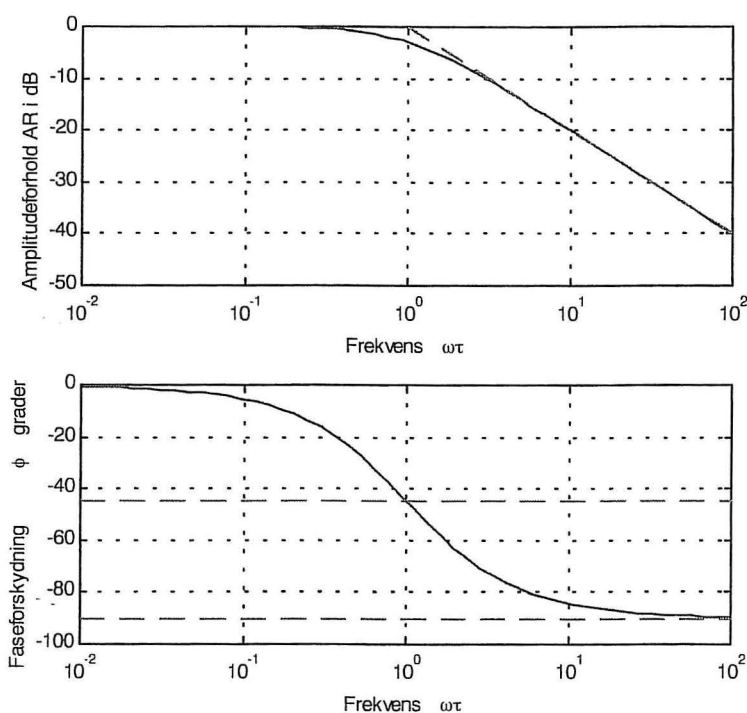
Frekvenskarakteristikkerne optegnes for  $10^{-2} \leq \omega\tau \leq 10^2$  med  $K = 1$ .

Ved at anvende den "normerede" frekvens  $\Omega = \omega\tau$  vil frekvenskarakteristikkerne gælde for alle 1. ordens overføringsfunktioner hvor produktet af tidskonstanten og vinkelfrekvensen ( $\omega\tau$ ) ligger i det angivne interval.

Amplitudekarakteristikken for andre værdier end  $K = 1$  findes ved at tillægge  $20\log(K)$  dB, altså ved at parallelforskyde amplitudekarakteristikken med bidraget  $20\log(K)$  dB. Bemærk at et amplitudeforhold på  $AR = 0$  dB betyder at  $AR = 1$  i absolut værdi.

Beregningerne foretages i MATLAB ved anvendelse af m-filen Bode og kan gennemføres ved følgende beregningssekvens:

```
w = logspace(-2, 2);           % Logaritmisk akse for  $10^{-2} \leq \omega\tau \leq 10^2$ 
[AR, P] = bode(1,[1 1],w);     % Overføringsfunktionen  $1/(1+s)$ 
AR = 20*log10(AR);
subplot(2,1,1), semilogx(w, AR), grid
subplot(2,1,2), semilogx(w,P), grid
```



**Figur 4.3.2-1.** Frekvenskarakteristikker for tidskonstantelement  $1/(1 + \tau s)$ .

Amplitudeforholdet kan karakteriseres ved to asymptoter: en vandret gennem  $20\log(K)$ , altså her gennem 0 dB, i det lave frekvensområde og en skrå, med hældningen -20 dB/dekade, i det høje frekvensområde. De to asymptoter skærer hinanden ved frekvensen  $\omega = 1/\tau$ .

Faseforskydningen er negativ (responsen er forsinket i forhold til påvirkningen), og går asymptotisk mod nul for små frekvenser og mod  $-90^\circ$  for høje frekvenser.

Ved frekvensen  $\omega = 1/\tau$  er amplitudeforholdet  $AR = -3$  dB svarende til  $AR = 1/\sqrt{2} = 0,71$  i absolut mål, hvilket betyder, at udgangssvingningens amplitude er ca. 70% af indgangssvingningens. Udgangssvingningen er forskudt  $-45^\circ$  eller  $(\pi/4)t_p/2\pi = t_p/8$  tidsenheder, hvor  $t_p$  er svingningens periodetid, der her er  $t_p = 2\pi/\omega = 2\pi\tau$ .

Ved frekvensen  $\omega = 100/\tau$  er amplitudeforholdet  $AR = \text{ca. } -40$  dB svarende til at udgangens amplitude er  $1/100$  af indgangens. Hurtige svingninger dæmpes således kraftigt i tidskonstantelementet.

...

**Eksempel 4.3.2-2.** Optegn Bodediagrammet for frekvenskarakteristikkerne til en overføringsfunktion af 2. orden givet ved

$$H(s) = \frac{\omega_n^2}{s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2} = \frac{1}{\left(\frac{s}{\omega_n}\right)^2 + 2\zeta\left(\frac{s}{\omega_n}\right) + 1}$$

for dæmpningsforholdet  $\zeta = 0,1, 0,5$  og  $1$ .

**Løsning.** Amplitudeforhold og faseforskydning bestemmes vha. (4.3.1-5 og -6)

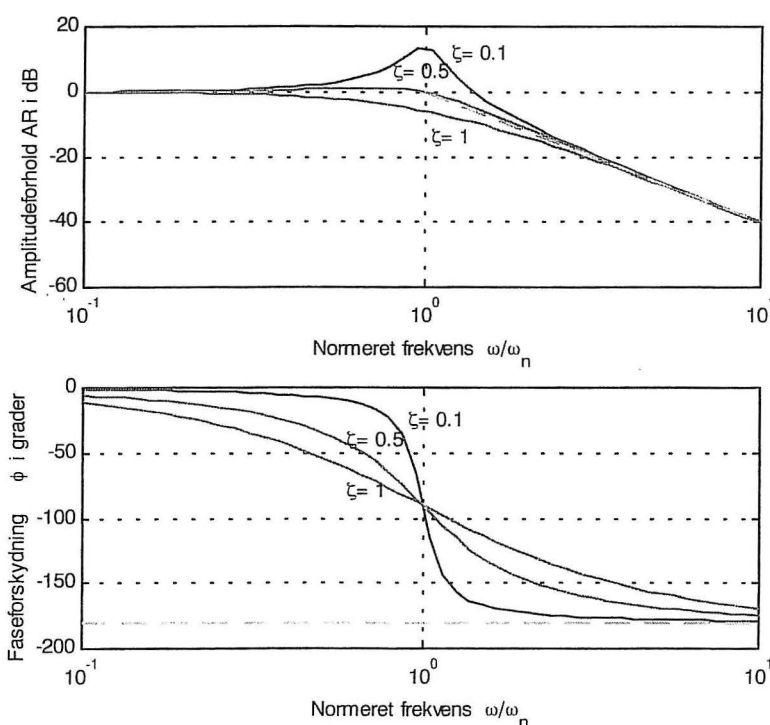
$$AR = 20 \log \left( \frac{1}{\sqrt{\left[1 - \left(\frac{\omega}{\omega_n}\right)^2\right]^2 + \left[2\zeta \left(\frac{\omega}{\omega_n}\right)\right]^2}} \right)$$

$$\varphi = -\arctg \left( \frac{2\zeta \left(\frac{\omega}{\omega_n}\right)}{1 - \left(\frac{\omega}{\omega_n}\right)^2} \right)$$

Frekvenskarakteristikkerne optegnes for den normerede vinkelfrekvens  $\omega/\omega_n$  i intervallet  $0,1 \leq \omega/\omega_n \leq 10$ .

Beregningerne ser således ud i MATLAB:

```
w = logspace(-1,1);
zeta = 0.1;
[AR1, P1] = bode(1,[1 2*zeta 1],w);      % Gentages for de ønskede værdier af zeta
AR1 = 20*log10(AR1);
subplot(2,1,1), semilogx(w, AR1, w, AR2, w, AR3), grid
subplot(2,1,2), semilogx(w,P1, w, P2, w, P2), grid
```



Figur 4.3.2-2. Amplitudekarakteristikker for et 2. ordens system.

Også her går amplitudeforholdet asymptotisk mod 0 dB for lave frekvenser og mod en skrå asymptote men nu med hældningen -40 dB/dekade ved høje frekvenser. Asymptoternes skæringspunkt ligger ved frekvensen  $\omega = \omega_n$ .

Faseforskydningen er igen negativ, og går mod nul for små frekvenser og mod -180° for høje frekvenser, og ved frekvensen  $\omega = \omega_n$  er faseforskydningen -90°.

Som det ses af figur 4.3.2-2 vil der for visse værdier af dæmpningsfaktoren  $\zeta$  ske en *forstærkning* af amplituden ( $AR > 0$  dB), hvis påvirkningen har frekvenser omkring  $\omega_n$ . Der optræder en resonanstop.

Den frekvens hvor amplitudeforholdet har maksimum og den maksimale værdi af amplitudeforholdet er bestemt ved

$$\omega_p = \omega_n \sqrt{1 - 2\zeta^2} \quad \text{og} \quad AR_p = 20 \log\left(\frac{1}{2\zeta\sqrt{1 - \zeta^2}}\right) \quad \text{for} \quad 0 \leq \zeta \leq \frac{1}{\sqrt{2}} = 0,707$$

Når dæmpningsforholdet  $\zeta \geq 1$  er systemet kritisk- eller overdæmpet (se afsnit 3.3.2) og her kan overføringsfunktionen omskrives til produktet af to 1. ordens elementer, hvorefter frekvenskarakteristikkerne kan bestemmes ud fra (4.3.2-4 og -5) og figur 4.3.2-1.

Af eksemplerne 4.3.2-1 og -2 ses at hver gang graden af et nævnerpolynomiet i en overføringsfunktion stiger med én, vil amplitudeforholdets skrå asymptote forøge hældningen med -20 dB/dekade og faseforskydningens nederste asymptote ændres med -90°.

...

**Eksempel 4.3.2-3.** Bestem frekvenskarakteristikkerne for en regulator med PI-styring.

**Løsning.** Overføringsfunktionen for en PI-styring der er angivet i (4.1.4-3)

$$H_k(s) = K_k \frac{1 + \tau_I s}{\tau_I s} = K_k \frac{1}{\tau_I s} (1 + \tau_I s)$$

kan opfattes som produktet af en ren integration  $H_1(s) = 1/\tau_I s$  og et reciprok tidskonstantelement  $H_2(s) = (1 + \tau_I s)$ . Forstærkningen sættes til  $K_k = 1$ , idet denne kun bidrager med en parallelforskydning på  $20\log(K_k)$  til amplitudekarakteristikken.

For integrationselementet gælder

$$H_1(i\omega) = \frac{1}{\tau_I \omega i} = \frac{1}{\tau_I \omega} e^{-i\frac{\pi}{2}}$$

Amplitudeforholdet og faseforskydningen er derfor

$$AR_1 = 20 \log\left(\frac{1}{\tau_I \omega}\right) = -20 \log(\tau_I \omega) \quad \text{og} \quad \varphi_1 = -\frac{\pi}{2}$$

Ved anvendelse af (4.3.2-6) og eksempel 4.2.3-1 ses at amplitudeforholdet og faseforskydningen for det reciproke tidskonstantelement er

$$AR_2 = 20 \log(\sqrt{1 + (\tau_I \omega)^2}) \quad \text{og} \quad \varphi = \arctg(\tau_I \omega)$$

Herefter kan hver af delementernes frekvenskarakteristikker optegnes og PI-styringsudstyrets frekvenskarakteristikker fås ved anvendelse af (4.3.2-4 og -5).

Beregningerne gennemføres i MATLAB for frekvensområdet  $10^{-2} \leq \tau_I \omega \leq 10^2$

```
w = logspace(-2,2);
```

```
[AR1, P1] = bode(1, [1 0], w);
```

```
% I-led
```

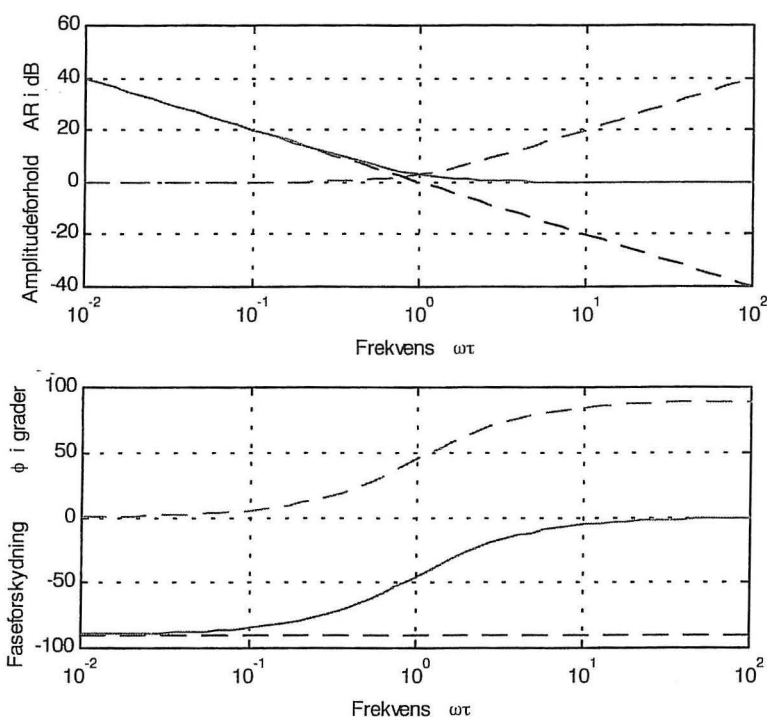
```
[AR2, P2] = bode([1 1], 1, w);
```

```
% Reciprok tidskonstantelement
```

```

A = 20*log10([AP1 AP2]);
P = [P1 P2];
subplot(2,1,1), semilogx(w, A, '- -', w, sum(A')), grid
subplot(2,1,2), semilogx(w, P, '- -', w, sum(P')), grid

```



**Figur 4.3.2-3.** Frekvenskarakteristikker for PI-styringsudstyr.

For lave frekvenser går amplitudeforholdet mod en asymptote med en hældning på 20 dB/dekade og ved høje frekvenser er asymptoten vandret. De to asymptoter skærer hinanden ved frekvensen  $\omega = 1/\tau_I$ . Tilsvarende går faseforskydningen mod  $-90^\circ$  for lave frekvenser og mod nul for høje. Det er således karakteristisk, at styringsudstyrets I-del bevirker at regulatorens udgangsstørrelse forstærkes kraftigt i det lave frekvensområde.

...

**Eksempel 4.3.2-4.** I mange anlæg kan der forekomme tidsforsinkelser fx på grund af transporttiden for en massestrøm i et rør eller en kanal. Som et typisk eksempel kan der henvises til opvarmningsbeholderen vist på figur 3.1.1-1. Her er der en tidsforsinkelse fra vandstrømmen forlader beholderen til den ankommer til temperaturføleren. Hvis der ses bort fra varmetabet fra rørstrækningen har vandet samme temperatur, når det ankommer til målepunktet som det havde da det forlod beholderen.

Opstil overførefunktionen der beskriver dette sammenhæng og optegn de tilhørende frekvenskarakteristikker.

**Løsning.** Transporttiden er bestemt ved  $t_0 = L/v$  hvor  $L$  er rørlængden og  $v$  er vandets strømningshastighed. Temperaturen ved rørets begyndelse kaldes  $T_0(t)$  og ved slutningen  $T_1(t)$ .

Når der kun sker en forsinkelse, er der følgende sammenhæng mellem ændringen i de to temperaturer:

$$\Delta T_l(t) = \Delta T_o(t - \tau_o)$$

Laplacetransformeres fås vha. tabel 2.3.1-1

$$\Delta T_l(s) = e^{-\tau_o s} \Delta T_o(s) = H(s) \Delta T_o(s) \quad \text{hvor} \quad H(s) = e^{-\tau_o s}$$

Overføringsfunktionen  $H(s)$  for en tidsforsinkelse afviger således fra tidligere overføringsfunktioner ved ikke at være en bruden rational funktion.

Frekvenskarakteristikkerne fås ved at erstatte  $s$  med  $i\omega$  i overføringsfunktionen, hvilket giver

$$H(i\omega) = e^{-i\omega\tau_o} \quad \text{hvorfor} \quad AR = 20 \log(1) = 0 \text{ dB} \quad \text{og} \quad \varphi = -\omega\tau_o$$

Svingninger overføres således med uændret amplitude men faseforskuet med vinklen  $-\omega\tau_o$  svarende til en tidsforskydning på  $\tau_o$ .

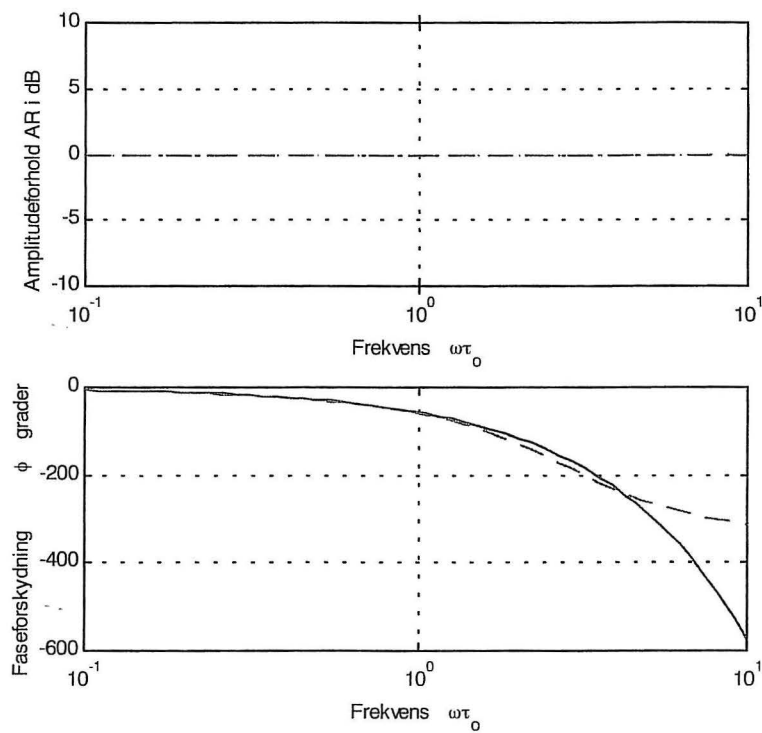
I visse tilfælde er det ønskeligt at have overføringsfunktionen for tidsforsinkelsen på samme form som andre indgående overføringsfunktioner, altså som en bruden rational funktion, hvilket kan opnås ved en Taylor-udvikling af eksponentialfunktionen efter følgende opskrift

$$H(s) = e^{-\tau_o s} = \frac{\exp(-\tau_o s / 2)}{\exp(\tau_o s / 2)} = \frac{1 - \tau_o s / 2 + (\tau_o s)^2 / 8 - (\tau_o s)^3 / 48 + \dots}{1 + \tau_o s / 2 + (\tau_o s)^2 / 8 + (\tau_o s)^3 / 48 + \dots}$$

Funktionen kan approksimeres ved at afkorte de uendelige rækker i tæller og nævner til et passende antal led (dette kaldes en Padé approksimation).

Frekvenskarakteristikkerne beregnes og optegnes i MATLAB og til sammenligning medtages karakteristikkerne for en 2. ordens Padé approksimation (kun led til og med  $s^2$  medtages):

```
w = logspace(-1, 1);           % Frekvensområde  $10^{-1} \leq \omega\tau_o \leq 10$ 
i = sqrt(-1);                  % Den imaginære enhed
AR = 0;
P = (180/pi)*angle(exp(-i*w));
[AR1, P1] = bode([1/8 -1/2 1], [1/8 1/2 1], w);
AR1 = 20*log10(AR1);
subplot(2,1,1), semilogx(w, A, w, AR1, '- -'), grid
subplot(2,1,2), semilogx(w, P, w, P1, '- -'), grid
```



**Figur 4.3.2-4.** Frekvenskarakteristikker for tidsforsinkelseselement.

Det ses af figur 4.3.2-4 at den tilnærmede overføringsfunktion for tidsforsinkelseselementet giver en god approksimation for frekvenser hvor  $\omega\tau_0 \leq 4$ . Selvom der opnås en god tilpasning til frekvenskarakteristikkerne kan det ikke anbefales at anvende det tilnærmede tidsforsinkelseselement ved simulering af dynamiske systemer.

...



# Kapitel 5 REGULERINGSKREDSSENS STABILITET

## Stabilitetskriterier

### Den åbne og den lukkede sløjfes frekvensanalyse

## 5.1 Stabilitetsundersøgelse

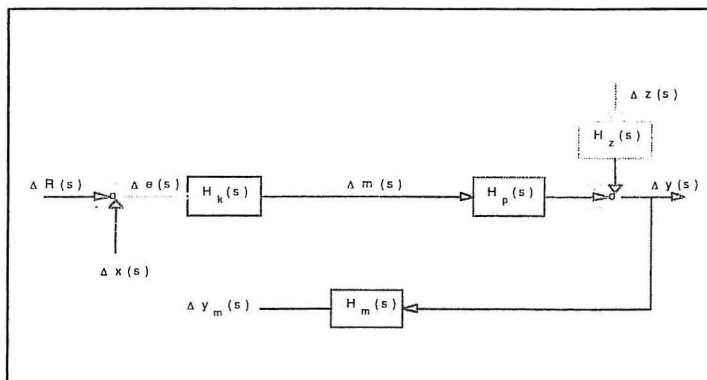
Da et reguleringssystems primære opgave er at imødegå indvirkningen fra forstyrrelser, må man forlange, at dette sker på en sådan måde, at den regulerede størrelse ikke kommer i langvarige svingninger eller bringes ud i en tilstand langt fra den ønskede.

Det er naturligvis de indgående overføringsfunktioners forstærkning og dynamiske egenskaber, der er afgørende for, om reguleringssystemet virker med en tilfredsstillende stabilitet. Det er tidligere vist, se afsnit 4.2.1, at en forstyrrelse af endelig størrelse vil få responsen til at vokse mod uendelig, hvis blot en af polerne i lukketsløjfefunktionerne er positiv (dog i praksis begrænset af at manøvreorganet kun kan bevæge sig ud i en af sine yderstillinger). Dette er naturligvis uacceptabelt og styringsudstyret må indstilles således, at denne situation ikke opstår. En måde at undersøge om reguleringssystemet er stabilt, er derfor en bestemmelse af polerne i lukketsløjfefunktionerne (rodriteriet), idet negative poler eller poler med negativ realdel sikrer, at en begrænset påvirkning altid giver en begrænset respons.

En anden måde at formulere stabilitet på er at forlange at enhver svingning, der opstår i reguleringssløjfen, skal dø ud af sig selv. Dette kan bekvemt undersøges gennem en frekvensanalyse af åbensløjfefunktionen (defineret i (3.2.1-3)).

### 5.1.1 Nyquist's stabilitetskriterium

Hvis der i et reguleringssystem opstår svingninger, der fortsætter udæmpet eller endog med voksende amplitude siges systemet at være ustabil. Om denne situation opstår kan ses ud fra en frekvensanalyse for den åbne sløjfe ud fra følgende ræsonnement, se figur 5.1.1-1:



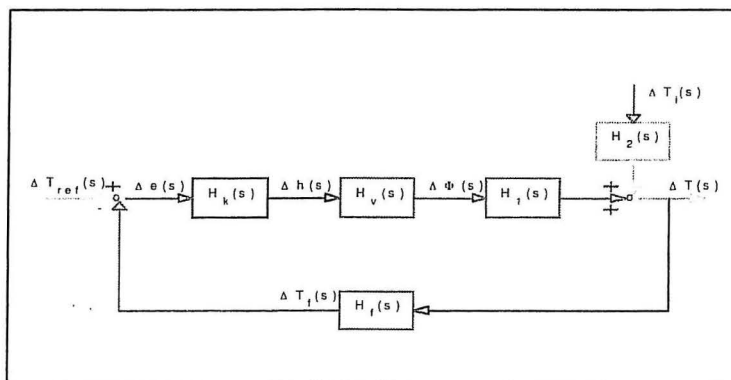
Figur 5.1.1-1. Den åbne sløjfe med påvirkningen  $\Delta x$  og respons  $\Delta y_m$ .

Sløjfen skæres op og der påføres en påvirkning  $\Delta x(s)$  som en harmonisk svingning med amplituden  $\Delta x$  og frekvensen  $\omega$ . Når der ikke er andre påvirkninger på systemet, er responsen  $\Delta y_m(s) = -H_k(s)H_p(s)H_m(s)\Delta x(s) = -G(s)\Delta x(s)$ , hvor  $G(s)$  er åbensløjfefunktionen.

Systemets frekvensrespons er da (se (4.3.1-9))  $\Delta y_m(\omega) = -\Delta x|G(i\omega)|\sin(\omega t + \varphi_G(\omega))$ . Hvis der eksisterer en frekvens for hvilken åbensløjfefunktionens fasevinkel  $\varphi_G(\omega) = -180^\circ$ , så bliver responsens samlede fasedrejning  $-360^\circ$  pga. det foranstående minustegn og responsen er da i fase med påvirkningen. Tænkes sløjfen nu lukket, således at  $\Delta y_m(s)$  er indgangssignal, er systemet ustabil hvis  $|G(i\omega)| > 1$ , idet svingningernes amplitude så til stadighed forstærkes rundt i kredsen. Er derimod  $|G(i\omega)| < 1$ , vil en lukning af sløjfen betynde at svingningerne dør ud og reguleringskredsen er stabil. Grænsetilfældet hvor  $|G(i\omega)| = 1$  vil give en respons med stående svingninger med konstant amplitude, systemet **pendler**.

Afbildes åbensløjfens frekvenskarakteristikker i et Bodediagram skal amplitudeforholdet  $AR_G$  ligge under 0 dB ved den frekvens  $\omega_N$  (Nyquist-frekvensen), hvor åbensløjfens fasevinkel  $\varphi_G = -180^\circ$  for at reguleringsystemet er stabilt. Ligger amplitudeforholdet over 0 dB ved denne frekvens er systemet ustabil. Dette kaldes Nyquist's stabilitetskriterium.

**Eksempel 5.1.1-1.** Der skal gennemføres en stabilitetsundersøgelse for reguleringskredsen til tanksystemet, der er behandlet tidligere i eksemplene 3.2.2-1 og 3.3.2-1. Systemets blokdiagram er vist i nedenstående figur 5.1.1-2.



**Figur 5.1.1-2.** Tanktemperaturreguleringsystem.

De indgående overføringsfunktioner er

$$H_k(s) = K_k \quad \text{P - styring}$$

$$H_v(s) = \frac{K_v}{1 + \tau_v s} \quad \text{med } \tau_v = 200 \text{ sec}$$

$$H_1(s) = \frac{K_1}{1 + \tau s} \quad \text{med } \tau = 600 \text{ sec}$$

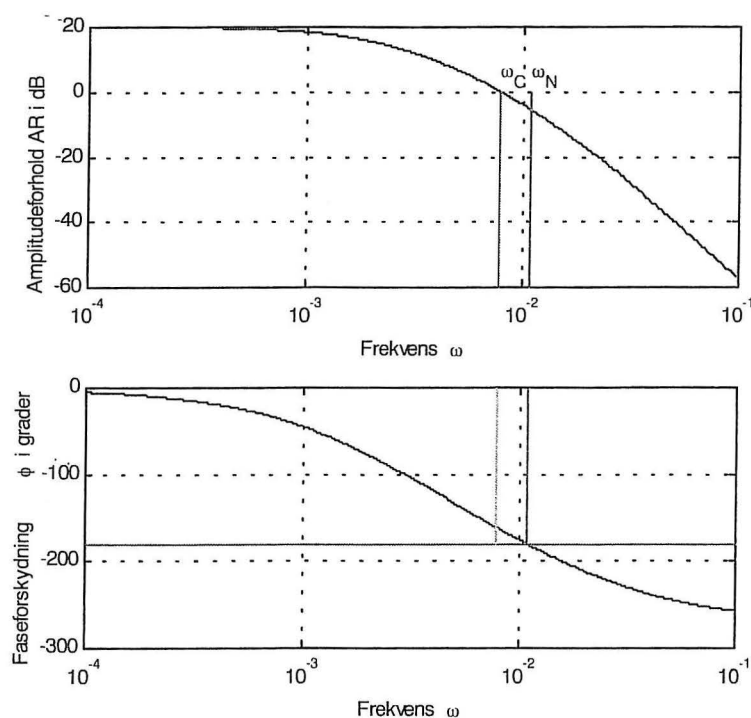
$$H_f(s) = \frac{K_f}{1 + \tau_f s} \quad \text{med } \tau_f = 60 \text{ sec}$$

$$K_o = K_k K_v K_1 K_f = 10 = \text{sløjfeforstærkningen med } K_k = 0,24$$

(Overføringsfunktionen  $H_v(s)$  er ændret i forhold til de tidligere eksempler, hvor denne har været et proportionalelement (3.1.3-3)).

**Løsning.** Åbensløjfefunktionens frekvenskarakteristikker beregnes og optegnes i MATLAB ved anvendelse af (4.3.2-4 og -5)

```
Ko = 10;
tv = 200;
t = 600;
tf = 60;
w = logspace(-4, -1);
den = conv([tv 1], [t 1]);
den = conv(den, [tf 1]);
[ARG,PG] = bode(Ko, den, w);
ARG = 20*log10(ARG);
subplot(2, 1, 1), semilogx(w, ARG), grid
subplot(2, 1, 2), semilogx(w, PG), grid
```



**Figur 5.1.1-3.** Åbensløjfens frekvenskarakteristik.

Det ses at reguleringssystemet er stabilt med de valgte parametre, idet amplitudekarakteristikken går under 0 dB ( $\sim -6$  dB) ved frekvensen  $\omega_N$  ( $\sim 0,011$  rad/sec), hvor fasevinklen er faldet til  $-180^\circ$ .

Amplitudeforholdet er 0 dB ved frekvensen  $\omega_C$  ( $\sim 0,008$  rad/sec), der kaldes **krydsfrekvensen**. Her aflæses faseforskydningen til  $\varphi_G \sim -160^\circ$ .

Eksemplet afsluttes med at optegne springresponsen for systemet når tankens tilgangstemperatur ændres en grad.

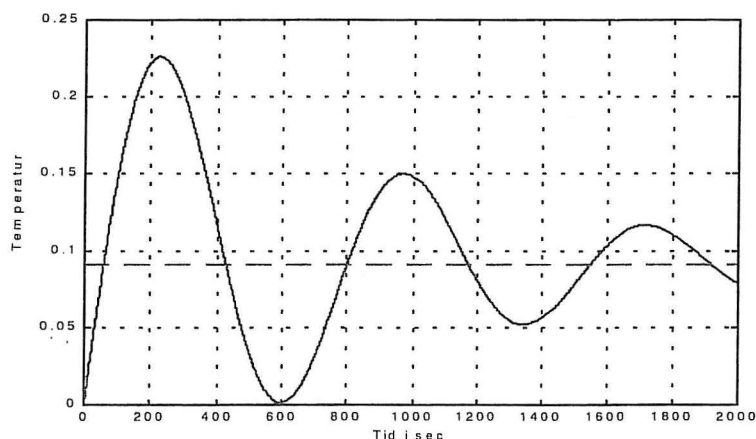
Lukketsløjfefunktionen er

$$\Delta T(s) = \frac{H_2(s)}{1 + G(s)} \Delta T_i(s) \quad \text{med} \quad H_2(s) = \frac{K_2}{1 + \tau s} = \frac{1}{1 + 600s}$$

$$\Delta T(s) = \frac{\frac{K_2}{1 + \tau s}}{1 + K_k \frac{K_v}{1 + \tau_v s} \frac{K_1}{1 + \tau s} \frac{K_f}{1 + \tau_f s}} \Delta T_i(s) = \frac{K_2 (1 + \tau_v s)(1 + \tau_f s)}{(1 + \tau_v s)(1 + \tau s)(1 + \tau_f s) + K_o} \Delta T_i(s)$$

Beregningssekvensen i MATLAB er, idet alle konstanter tidligere er defineret

```
num = conv([tv 1],[tf 1]);
den = conv(num,[t 1]);
den(1,4) = den(1,4) + Ko;
tid = 0:1000;
T = step(num,den,tid);
plot(tid, T), grid
```



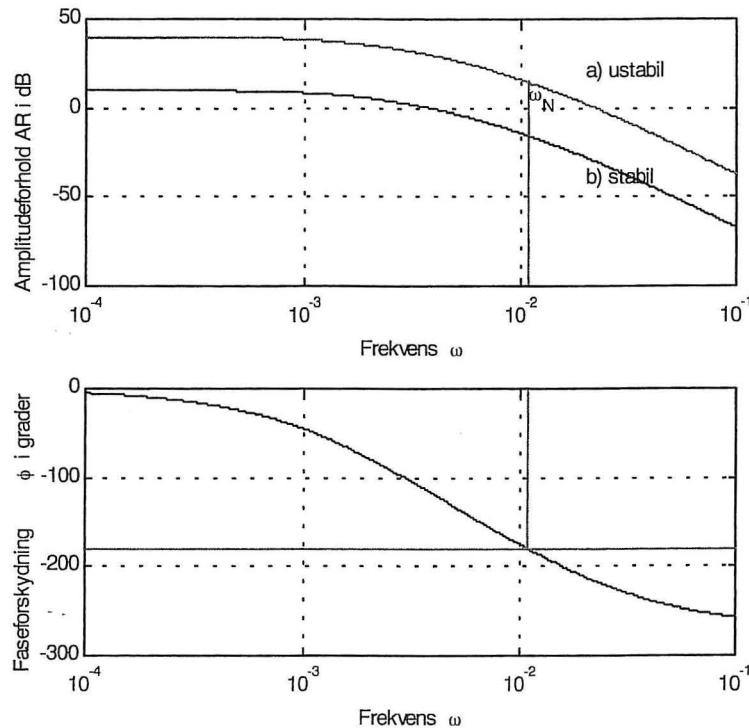
**Figur 5.1.1-4.** Springrespons for tanktemperatur ved ændring i forstyrrelse.

Med den valgte indstilling af styringsudstyrets forstærkning fås et indsvingningsforløb der kun langsomt dør ud mod den stationære værdi (vist punkteret på figuren). Årsagen hertil ligger i, at åbensløjfefunktionens frekvenskarakteristik  $G(i\omega)$  passerer for tæt på det kritiske punkt  $AR = 0$  dB og  $\varphi = -180^\circ$ . Dæmpningen i dette system (af 3. orden) er lidt for lille. Sammenlign i øvrigt denne respons med den tilsvarende i figur 3.3.2-1 (for  $K_o = 10$ ).

...

### 5.1.2 Forstærknings- og fasemargin

Hvis en optegning af åbensløjfefunktionens frekvenskarakteristik viser, at systemet er ustabil, se figur 5.1.2-1, er der flere muligheder for at gøre systemet stabilt.



**Figur 5.1.2-1.** Frekvenskarakteristikker for en åbensløjfefunktion  $G(s)$ .

- 1) Den enkleste metode til at opnå stabilitet er at mindske sløjfeforstærkningen (specielt ved at nedsætte styringsudstyrets forstærkning), idet dette sænker amplitudekarakteristikken uden at ændre fasekarakteristikken (jf. kurve a) og b) i figur 5.1.2-1).
- 2) Der kan indføres et element i sløjfen, der forskyder fasekarakteristikkenes skæring med  $-180^\circ$  mod en højere frekvens, hvor amplitudekarakteristikken ligger under 0 dB, eller
- 3) Der kan anvendes en kombination af de to beskrevne tiltag.

En nedsættelse af sløjfeforstærkningen af hensyn til stabiliteten bør dog ikke ske ukritisk, idet en stor sløjfeforstærkning er ønskelig af hensyn til fx et hurtigt indsvingningsforløb samt nøjagtigheden overfor forstyrrelser. Hvis reguleringssystemet er forsynet med P-styring, kan tabet i sløjfeforstærkning måske kompenseres ved i stedet at vælge en PI-styring, idet denne giver stor forstærkning i det lave frekvensområde og kun har ringe indflydelse på fasekarakteristikken i det høje frekvensområde (se figur 4.3.2-3).

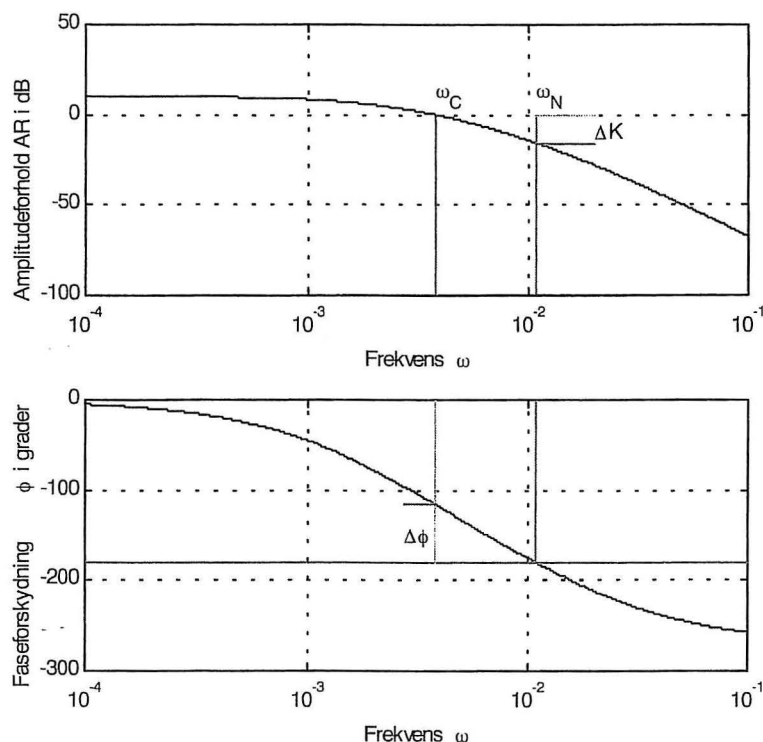
Hvis ovenstående metode 2) skal anvendes, skal der ske et løft af fasekarakteristikken. Hvis der indgår tidsforsinkelser i reguleringskredsen bør disse fjernes eller begrænses, idet en tidsforsinkelse altid trækker fasekarakteristikken kraftigt nedad (se figur 4.3.2-4). En anden mulighed er at vælge styringsudstyr med D-virkning, idet denne netop giver et faseløft som beskrevet i efterfølgende eksempel 5.1.2-1.

For at karakterisere et reguleringssystems relative stabilitet indføres to størrelser der er et mål for hvor tæt systemet er på stabilitetsgrænsen:

**Forstærkningsmargin**  $\Delta K$  er det antal dB, som amplitudekarakteristikken ligger under 0 dB ved den frekvens ( $\omega_N$ ), hvor fasekarakteristikken er  $-180^\circ$  og

**Fasemargin**  $\Delta\varphi$  der er den vinkel, som fasekarakteristikken ligger over  $-180^\circ$  ved den frekvens ( $\omega_C$ ), hvor amplitudekarakteristikken er 0 dB.

De to størrelser er vist på figur 5.1.2-2.



**Figur 5.1.2-2.** Definition af forstærkningsmargin  $\Delta K$  og fasemargin  $\Delta\varphi$ .

For at opnå en passende stabilitet i reguleringssystemet må det normalt kræves at

$$\Delta K > 6 \text{ dB} \quad \text{og} \quad \Delta\varphi > 30^\circ \quad (5.1.2-1)$$

Det er nødvendigt at sikre, at begge krav er opfyldt, idet der er muligt at have systemer, der er tæt på ustabilitet, selv når den ene af de to størrelser har en passende værdi.

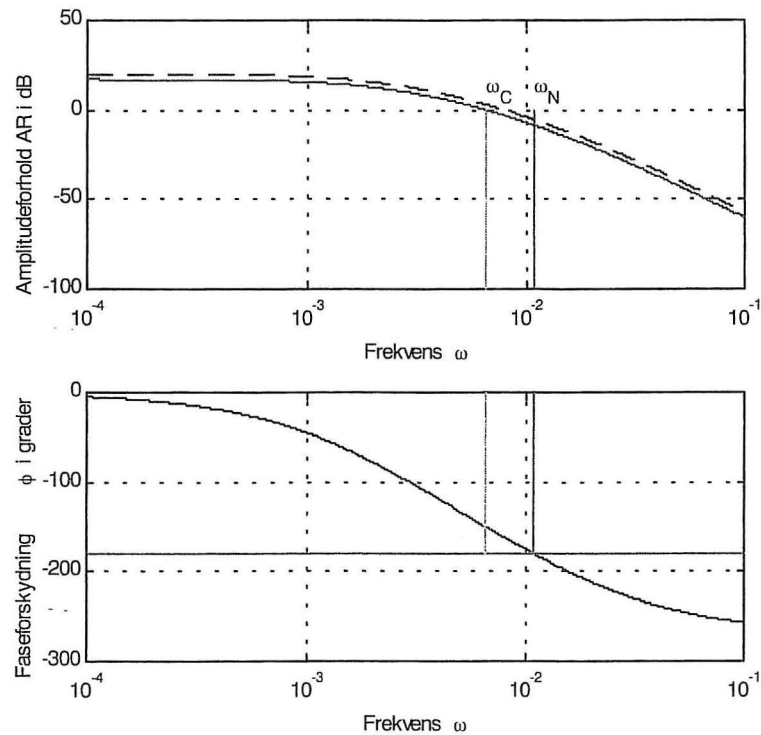
**Eksempel 5.1.2-1.** I eksempel 5.1.1-1 blev det konstateret at tanktemperaturreguleringssystemet var stabilt med den valgte P-styring men at indsvingningen efter en springvis forstyrrelse var længe om at dø ud. Af (5.1.2-1) ses at kravet til forstærkningsmargin  $\Delta K$  netop opfyldes men at kravet til fasemargin ikke opfyldes, idet denne er  $\Delta\varphi = 20^\circ$  (se figur 5.1.1-3).

- bestem den sløjfeforstærkning  $K_o$  hvor stabilitetskravet (5.1.2-1) netop er opfyldt, og
- undersøg stabilitetsforholdene hvis styringsudstyret ændres til en PI-styring med følgende parametre  $K_o = 3$  og  $\tau_i = 525 \text{ sec}$  og når der anvendes en PID-styring med  $K_o = 7$ ,  $\tau_i = 400 \text{ sec}$  og  $\tau_D = 60 \text{ sec}$ .

**Løsning.** Tilfælde a) løses ud fra figur 5.1.1-3 der er optegnet for  $K_o = 10$ . Amplitudekarakteristikken skal sænkes indtil  $AR_G = 0 \text{ dB}$  ved den frekvens hvor  $\varphi_G = -150^\circ$ . Dette giver en sænkning på 2,6 dB, hvorfor sløjfeforstærkningen skal være

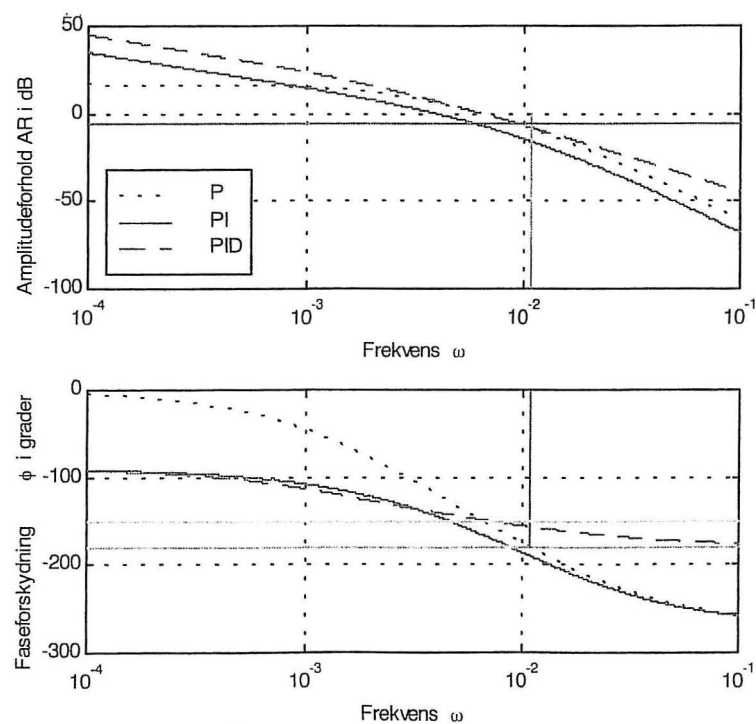
$K_{o1} = 10^{\frac{2.6}{20}} K_o = 0,74 K_o = 0,74 \cdot 10 = 7,4$ . I praksis vil det være styringsudstyrets forstærkning der ændres, og denne skal indstilles til  $K_{k1} = 0,74 K_k$  (med de gennemgående talværdier i eksemplet svare dette til  $0,74 \cdot 0,24 = 0,178$  eller et P-bånd på  $x_p = 1/K_k = 5,6^\circ \text{C}$ ).

Systemets forstærkningsmargin er nu  $\Delta K = 6 + 2,6 = 8,6 \text{ dB}$  og fasemargin er selvfølgelig  $\Delta\varphi = 30^\circ$ . Frekvenskarakteristikkerne fremgår af figur 5.1.2-3.



Figur 5.1.2-3. Systemet opfylder stabilitetskravene hvis amplitudeforholdet sænkes 2,6 dB.

For tilfælde b) er der intet nyt i beregningsgangen hvorfor frekvenskarakteristikkerne vises direkte i figur 5.1.2-4. Stabilitetskravene  $\Delta K = 6$  dB og  $\Delta\varphi = 30^\circ$  er indtegnet sammen med karakteristikkene for ovenstående tilfælde med P-styring.



Figur 5.1.2-4. Sammenligning mellem P-, PI- og PID-styring.

Ved PI-styring ses at fasekarakteristikken kun sænkes lidt i forhold til tilfældet med P-styring i området omkring  $\omega_N$ , samt at tabet i statisk forstærkning kompenseres af en stor dynamisk forstærkning i det lave frekvensområde. Ved PID-styring ses en kraftig hævnning af fasekarakteristikken i det høje frekvensområde pga. D-virkningen, og i dette tilfælde går fasevinklen asymptotisk mod  $-180^\circ$ , hvorfor systemet ikke kan blive ustabil efter Nyquist's stabilitetskriterium.

Resultaterne kan sammenfattes i nedenstående skema

	P-styring	PI-Styring	PID-styring
Sløjfeforstærkning $K_o$	7,4	3	7
Forstærkningsmargin $\Delta K$ dB	8,6	11,9	-
ved frekvensen $\omega_N$ rad/sec	0,0109	0,0087	-
Fasemargin $\Delta\varphi$ grader	30	36	31
ved frekvensen $\omega_C$ rad/sec	0,0065	0,0039	0,0064

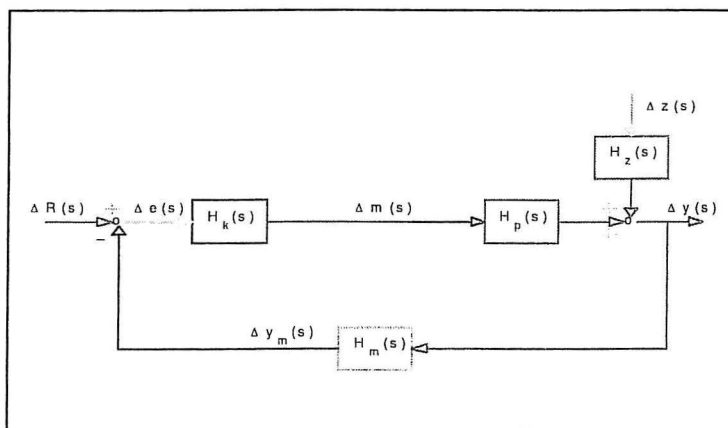
...

## 5.2 Den lukkede sløjfes frekvenskarakteristikker

I det foregående afsnit er vist, hvordan det kan afgøres, om et reguleringssystem er stabilt eller ustabil, og hvilken sløjfeforstærkning der i givet fald kan tillades. Vi vil nu se, hvilken betydning valget af specielt forstærknings- og fasemargin har på den lukkede sløjfes reaktion på harmoniske påvirkninger.

### 5.2.1 Bodediagram for lukketsløjfen

Der tages udgangspunkt i blokdiagrammet for standardreguleringskredsen vist på figur 5.2.1-1.



Figur 5.2.1-1. Reguleringssystemets blokdiagram.



Systemets åbensløjfefunktion er

$$G(s) = H_k(s)H_p(s)H_m(s) \quad (5.2.1-1)$$

og de to lukketsløjfefunktioner der viser sammenhængen mellem den regulerede størrelse og hhv. forstyrrelsen og en referenceændring er

$$\frac{\Delta y(s)}{\Delta z(s)} = H_{oz}(s) = \frac{H_z(s)}{1+G(s)} = \frac{G(s)}{1+G(s)} \frac{H_z(s)}{H_k(s)H_p(s)H_m(s)} \quad (5.2.1-2)$$

$$\frac{\Delta y(s)}{\Delta R(s)} = H_{or}(s) = \frac{H_k(s)H_p(s)}{1+G(s)} = \frac{G(s)}{1+G(s)} \frac{1}{H_m(s)} \quad (5.2.1-3)$$

Begge disse lukketsløjfefunktioner indeholder således den specielle lukketsløjfefunktion

$$H_{oG}(s) = \frac{G(s)}{1+G(s)} \quad (5.2.1-4)$$

Hvis påvirkningen er en sinussvingning fås systemets frekvensrespons af ovenstående ved at erstatte  $s$  med  $i\omega$  som tidligere beskrevet. Heraf ses straks betydningen af at åbensløjfefunktionen ikke antager værdien  $G(i\omega) = -1$  eller  $|G(i\omega)| = 1$  ved  $\varphi_G(\omega) = -180^\circ$  som krævet ved Nyquist's stabilitetskriterium.

For at se betydningen af forstærknings- og fasemargin undersøges først forløbet af den specielle lukketsløjfefunktion  $H_{oG}(i\omega)$  (5.2.1-4), der udelukkende afhænger af åbensløjfefunktionen.

Frekvenskarakteristikken er

$$H_{oG}(i\omega) = |H_{oG}|e^{i\theta} = \frac{G(i\omega)}{1+G(i\omega)} = \frac{|G|e^{i\varphi_G}}{1+|G|e^{i\varphi_G}} \quad (5.2.1-5)$$

Heraf fås

$$\frac{1}{|H_{oG}|}e^{-i\theta} = 1 + \frac{1}{|G|}e^{-i\varphi_G} = 1 + \frac{1}{|G|}(\cos(\varphi_G) - i\sin(\varphi_G)) \quad (5.2.1-6)$$

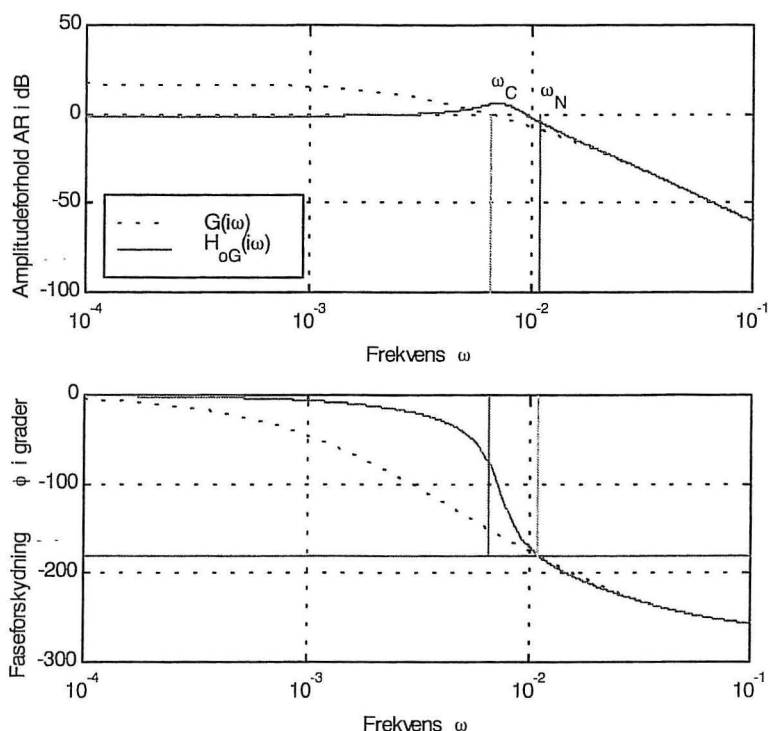
hvilket giver følgende modulus

$$|H_{oG}| = \frac{1}{\sqrt{(1 + \frac{\cos(\varphi_G)}{|G|})^2 + (\frac{\sin(\varphi_G)}{|G|})^2}} = \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{1}{|G|^2} + 2\frac{\cos(\varphi_G)}{|G|}}} \quad (5.2.1-7)$$

og argument

$$\theta = -\arctg\left(\frac{\frac{\sin(\varphi_G)}{|G|}}{1 + \frac{\cos(\varphi_G)}{|G|}}\right) = \arctg\left(\frac{\sin(\varphi_G)}{|G| + \cos(\varphi_G)}\right) \quad (5.2.1-8)$$

For en normalt forløbende åbensløjfefunktion  $G(i\omega)$  får denne specielle lukketsløjfefunktion  $H_{oG}(i\omega)$  et udseende som vist på figur 5.2.1-2.



**Figur 5.2.1-2.** Typisk forløb af frekvenskarakteristik for  $H_{oG}(i\omega)$ .

Frekvensområdet deles af åbensløjfens krydsfrekvens  $\omega_C$  og ved hjælp af (5.2.1-7 og -8) ses:

for  $\omega \ll \omega_C$  er  $|G| \gg 1$  og dermed  $|H_{oG}| \approx 1$  (0 dB) og  $\theta \rightarrow 0$

for  $\omega \gg \omega_C$  er  $|G| \ll 1$  og  $|H_{oG}| \rightarrow |G|$  og  $\theta \rightarrow \varphi_G$ .

Den karakteristiske resonanstop der optræder på lukketsløjfens amplitudekarakteristik omkring krydsfrekvensen, er direkte bestemt af systemets forstærknings- og fasemargin:

for  $\omega = \omega_N$  er  $|G| = 1/\Delta K$  (forstærkningsmargin i rent tal) og  $\varphi_G = -180^\circ$  hvilket giver

$$|H_{oG}| = \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{1}{|G|^2} - \frac{2}{|G|}}} = \frac{1}{\frac{1}{|G|} - 1} \quad \text{og} \quad \theta = -180^\circ \quad (5.2.1-9)$$

hvis forstærkningsmargin  $\Delta K > 2$  (6 dB) er  $|H_{oG}| < 1$ , men hvis forstærkningsmargin er mindre, vokser  $|H_{oG}|$  kraftigt.

for  $\omega = \omega_C$  er  $|G| = 1$  og  $\varphi_G = -180 + \Delta\varphi$  (hvor  $\Delta\varphi$  er fasemargin) hvilket giver

$$|H_{oG}| = \frac{1}{\sqrt{2 + 2\cos(\varphi_G)}} = \frac{1}{\sqrt{2 - 2\cos(\Delta\varphi)}} \quad \text{og} \quad (5.2.1-10)$$

$$\theta = \arctg\left(\frac{\sin(\varphi_G)}{1 + \cos(\varphi_G)}\right) = \frac{\varphi_G}{2}$$

hvis  $\Delta\varphi < 60^\circ$  er  $|H_{oG}| > 1$ , men for  $\Delta\varphi > 30^\circ$  er  $|H_{oG}| < 2$  ( $\approx 6$  dB).

Med udgangspunkt i forløbet af amplitudekarakteristikken for den specielle lukketsløjefunktion  $|H_{oG}|$  er det nu muligt at give en kvalitativ vurdering af hvordan dels referenceændringer og dels forstyrrelser overføres gennem den lukkede sløjfe.

For referenceændring fås amplitudeforholdet af (5.2.1-3)

$$AR_{oR} = 20 \log(|H_{oR}|) = 20 \log(|H_{oG}|) - 20 \log(|H_m|) \quad (5.2.1-11)$$

Da det er ønskeligt at referenceændringer overføres uændret til den regulerede størrelse, dvs.  $AR_{oR} \sim 0$  dB for alle frekvenser, bør måleudstyret have mindst mulig indflydelse i (5.2.1-11) idet  $|H_{oG}| \sim 1$  (0 dB) for frekvenser op til  $\omega_N$ . Dette betyder, at måleudstyrets forstærkning (som tidligere omtalt) skal være  $K_m = 1$ , og at eventuelle tidskonstanter skal være så små som muligt. Ved frekvenser større end  $\omega_N$  er reguleringssystemet så dæmpet, at det ikke har nogen virkning at ændre referencen.

Ses på forstyrrelsens indflydelse fås af (5.2.1-2)

$$AR_{oz} = 20 \log(|H_{oz}|) = 20 \log(|H_{oG}|) + 20 \log(|H_z|) - 20 \log(|G|) \quad (5.2.1-12)$$

Her er det ønskeligt at forstyrrelser dæmpes så meget som muligt og amplitudekarakteristikken  $|H_{oz}|$  bør derfor ligge så lavt som muligt i Bodediagrammet. Dette opnås ved at have størst mulig forstærkning i åbensløjfen  $G(s)$  og specielt i styringsudstyret  $H_k(s)$  idet  $H_z(s)$  og  $H_p(s)$  (der indgår i  $G(s)$ ) sædvanligvis har nogenlunde ens overføringsfunktioner, der så ophæver hinanden.

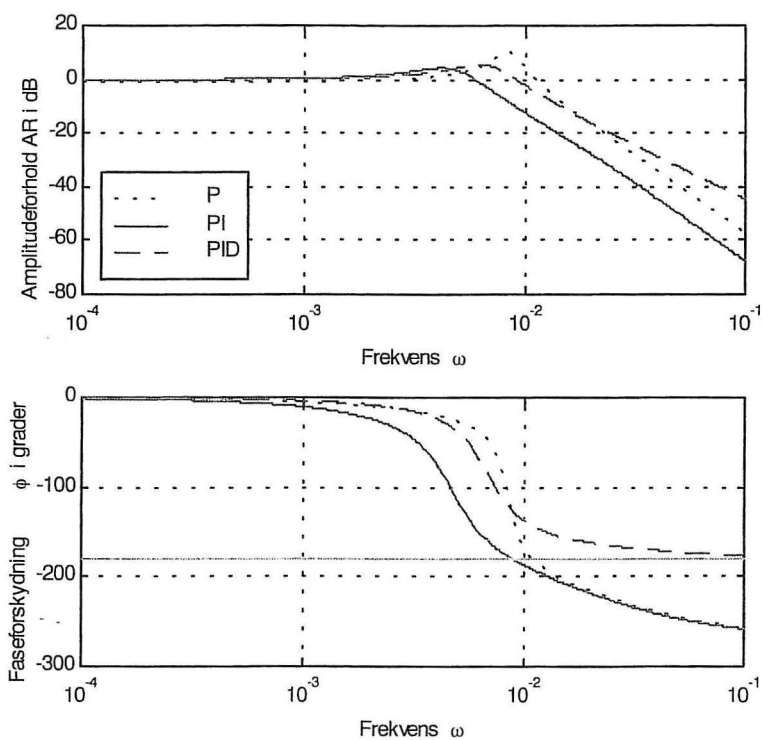
For frekvenser over  $\omega_N$  er  $AR_{oz} \approx 20 \log(|H_z|)$  og reguleringssystemet har således ikke længere nogen virkning da forstyrrelserne overføres uændret. Reguleringsobjektets overføringsfunktion  $H_z(s)$  vil dog normalt dæmpe svingninger kraftigt i dette frekvensområde.

**Eksempel 5.2.1-1.** Bestem frekvenskarakteristikkerne for lukketsløjefunktionen  $H_{oz}(s)$  fra eksempel 5.1.2-1.

**Løsning.** Det forudsættes at de indledende beregninger til bestemmelse af reguleringssystemets åbensløjefunktion  $G(i\omega)$  er opstillet i MATLAB, hvorefter beregningsgangen er følgende, idet der også foretages en beregning af den specielle lukketsløjefunktion  $H_{oG}(i\omega)$ :

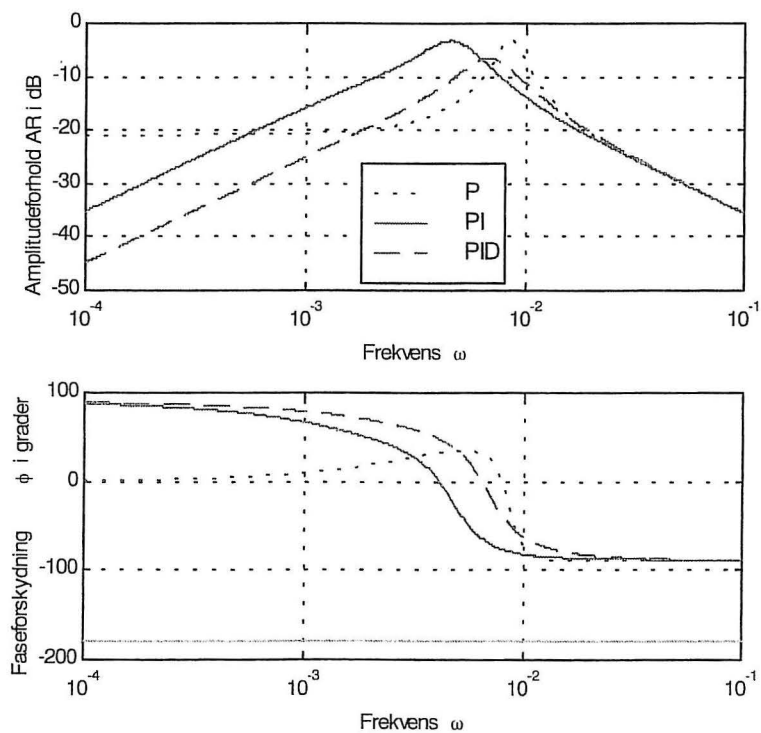
```
[ARG,PG] = bode(num,den,w);           % Åbensløjfen
G = ARG.*exp(sqrt(-1)*(pi/180)*PG);
HoG = G./(1+G);                       % Den specielle lukketsløjfe
ARoG = 20*log10(abs(HoG));
PoG = (180/pi)*angle(HoG);
ARG = 20*log10(ARG);
[AR2,P2] = bode(1,[t 1],w);          % Overføringsfunktionen H2(iw)
AR2 = 20*log10(AR2);
ARoz = ARoG+AR2-ARG;                  % Lukketsløjefunktionen Hoz(iw)
Poz = PoG+P2-PG;
```

Samme beregningsprocedure kan anvendes i alle tre tilfælde, og karakteristikkerne kan optegnes som vist efterfølgende.



Figur 5.2.1-3. Den specielle lukketsløjfelfunktion  $H_{OG}(i\omega)$  i de tre tilfælde.

I tilfældet med P-styring er fasemargin  $\Delta\varphi = 30^\circ$  (se eksempel 5.1.2-1), hvilket giver anledning til den forholdsvis store resonanstop.



Figur 5.2.1-4. Lukketsløjfelfunktionen  $H_{OZ}(i\omega)$  i de tre tilfælde.

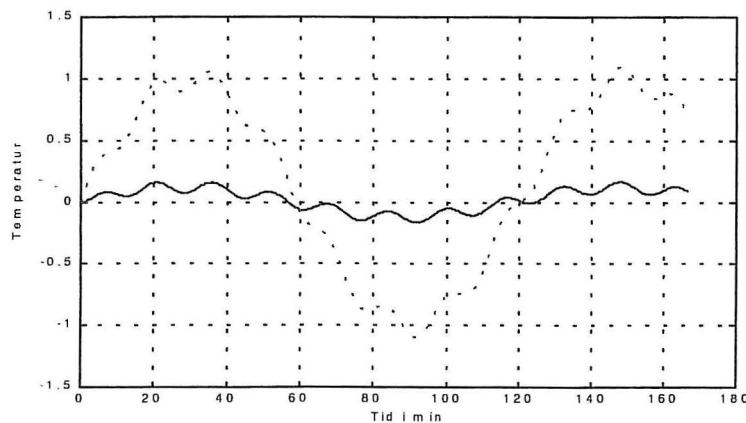
I alle tre tilfælde er der en god dæmpning i det lave frekvensområde. Sløjfeforstærkningen  $K_0$  er hhv. 7,4, 3 og 7 for systemet med P-, PI- og PID-styring men det ses at den lave sløjfeforstærkning i tilfældet med PI-styring kompenseres af dette styringsudstyrs store dynamiske forstærkning.

Eksemplet afsluttes med at vise den regulerede størrelses tidsforløb når tilgangstemperaturen (forstyrrelsen) er

$$\Delta T_i(t) = \sin(\omega_1 t) + 0.1 \sin(\omega_2 t)$$

hvor svingningstiderne er hhv. 2 timer og 16 min hvilket giver frekvenserne  $\omega_1 = 2\pi/(2 \cdot 3600) = 8,7 \cdot 10^{-4}$  rad/sec og  $\omega_2 = 2\pi/(16 \cdot 60) = 0,0065$  rad/sec ( $= \omega_C$ ).

Indsvingningerne er vist nedenstående for tilfældet hvor der er P-styring med en sløjfeforstærkning på 7,4.



Figur 5.2.1-5. Tanktemperatures reaktion på ændring i tilgangstemperaturen.

Lukketsløjfens resonanstop (se figur 5.2.1-4) kommer synligt frem, idet den hurtige svingningskomponent kun dæmpes lidt mens den langsomme svingning kun anes i den regulerede størrelse.

...

### 5.3 Reguleringsnøjagtighed og regulatorindstilling

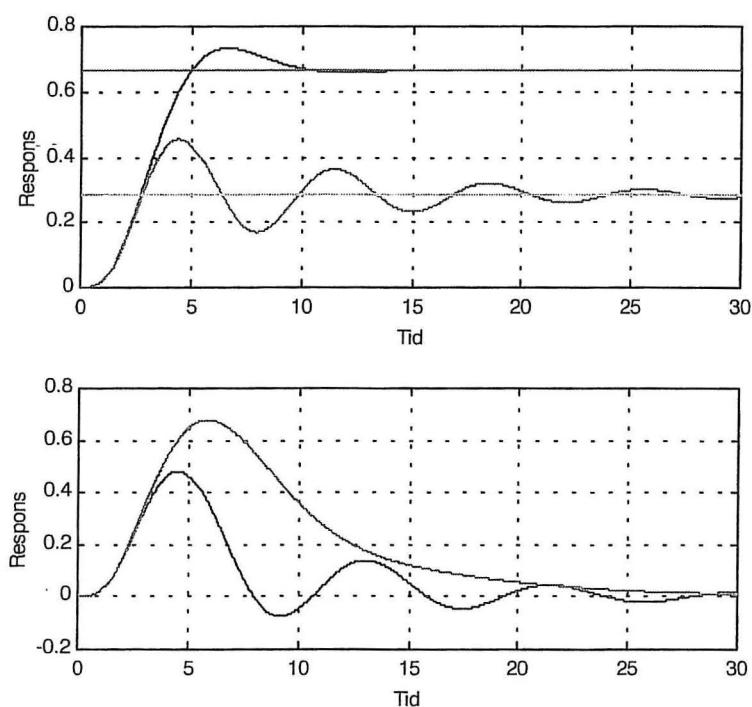
Et af hovedresultaterne fra stabilitetsanalysen er, at selve regulatoren skal have så stor en forstærkning som muligt, naturligvis inden for de rammer der tillades af stabilitetshensyn. Dette kan opnås enten gennem en stor statisk forstærkning (proportionalitetskonstant) og/eller som en stor dynamisk forstærkning, som specielt forekommer, når styringsudstyret har integralvirkning (PI- og PID-styring). Dette betyder, at den statiske forstærkning ikke behøver at være så stor i systemer med PI- og PID-styring, de vil altid forsøge at udregulere forstyrrelsernes indvirkning - den statiske nøjagtighed er god - men da dynamikken i kredsen er blevet mere indviklet, er der også større mulighed for et uroligt indsvingningsforløb. Regulatorens parametre bør altid indstilles således at det ønskede reguleringsresultat opnås så hurtigt som muligt og dette bør gælde overalt i reguleringsområdet, hvorfor det er vigtigt at indrette reguleringsystemet således at der opnås lineære karakteristikker i hele området.

Herefter melder spørgsmålet sig, om hvilken "nøjagtighed" der kan opnås med reguleringen og hvilke regulatorparametre der er optimale.

### 5.3.1 Reguleringsnøjagtighed

Når et begreb som reguleringsnøjagtighed skal vurderes, er det nødvendigt, at dette sker ud fra nogle ensartede og entydige forudsætninger, som fx kunne være, at vi kun diskuterer dette spørgsmål, når påvirkningen (dvs. forstyrrelse eller referenceændring) sker springvis.

På nedenstående figur er vist nogle typiske indsvingningsforløb for den regulerede størrelse efter et momentant spring i forstyrrelsen.



Figur 5.3.1-1. Typiske indsvingningsforløb ved P-styring (øverst) og PI-styring.

Hvad skal vi nu forstå ved "nøjagtighed"? I kravspecifikationerne til et reguleringssystem kan der stå følgende "...den regulerede temperatur skal holdes med  $\pm \Delta$  °C".

Som det fremgår af figur 5.3.1-1 kan indsvingningsforløb typisk inddeles i to faser: det første transiente (det forbigående dynamiske område) og det sidste stationære område.

Med det specificerede nøjagtighedskrav menes der da: at afvigelsen under ingen omstændigheder må overskride  $\pm \Delta$  °C eller menes der, at de  $\pm \Delta$  °C skal holdes, når systemet er faldet til ro og at man dermed accepterer kortvarige store udsving?

Man skal således nøje overveje betydningen af de krav der stilles – i almindelighed vil man nok opfatte reguleringskravet for godt opfyldt hvis nøjagtigheden  $\pm \Delta$  °C overholdes efter den transiente fase, altså at systemet skal have en *statisk nøjagtighed* på  $\pm \Delta$  °C, hvis dette vel at mærke sker uden alt for store udsving under det dynamiske forløb. Hvis der anvendes P-styring, må der naturligvis også angives for hvor stort et spring i forstyrrelsen den specificerede nøjagtighed skal holdes.

Det er muligt at angive optimeringskriterier for indstilling af regulatorens parametre fx i form af et af nedenstående udtryk, der tager udgangspunkt i en minimering af arealet mellem den regulerede størrelse  $\Delta y(t)$  og tidsaksen:

$$\begin{aligned} \int_0^{\infty} |\Delta y(t)| dt &= \min \\ \int_0^{\infty} (\Delta y(t))^2 dt &= \min \\ \int_0^{\infty} |\Delta y(t)| \cdot t \cdot dt &= \min \end{aligned} \quad (5.3.1 - 1)$$

Ved optimering efter den kvadratiske metode lægges der stor vægt på udsvingenes størrelse, specielt på de første udsving, mens der ved den sidste metode lægges vægt både på udsvingenes størrelse og varighed. Ovenstående kan naturligvis ikke anvendes på systemer med P-styring, hvor der forekommer en blivende afvigelse, men her kan der evt. ses på den regulerede størrelses afvigelse fra stationærværdien. En anden mulighed for optimering kan bestå i at kræve at forholdet mellem to på hinanden følgende oversving har en bestemt værdi fx 1:0,25, således at der sikres en hurtig afklingen af svingningerne.

Ovenstående optimeringsmetoder kan anvendes i forbindelse med simulering af et reguleringssystem, hvor man har kendskab til alle indgående overføringsfunktioner og gennemfører en parametervariation med henblik på at finde den bedst mulige indstilling af regulatoren. Hvis dette udføres for systemer med særlig enkel dynamik er det muligt at opstille nogle forenklede regler for valg af reguleringsparametre, som det vil fremgå af det følgende.

### 5.3.2 Reguleringssystemer med forenklet dynamik

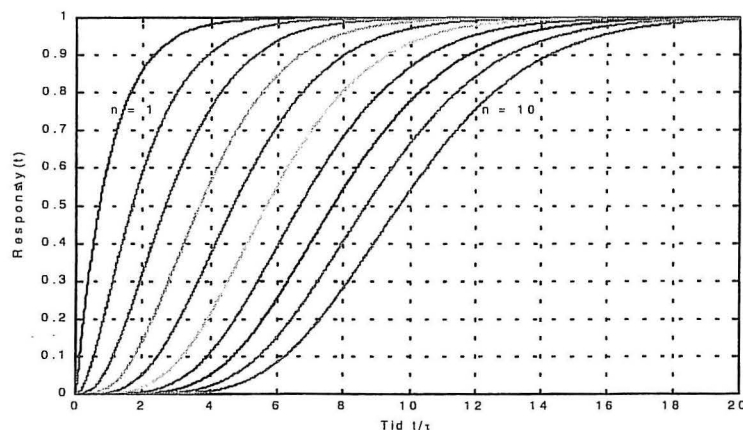
Der tages udgangspunkt i et dynamisk system der kan beskrives gennem en overføringsfunktion med et antal ens tidskonstanter

$$\Delta y(s) = H(s) \Delta x(s) = \frac{1}{(1 + \tau s)^n} \Delta x(s) \quad (5.3.2 - 1)$$

Udsættes dette system for et enhedsspring i påvirkningen fås følgende respons

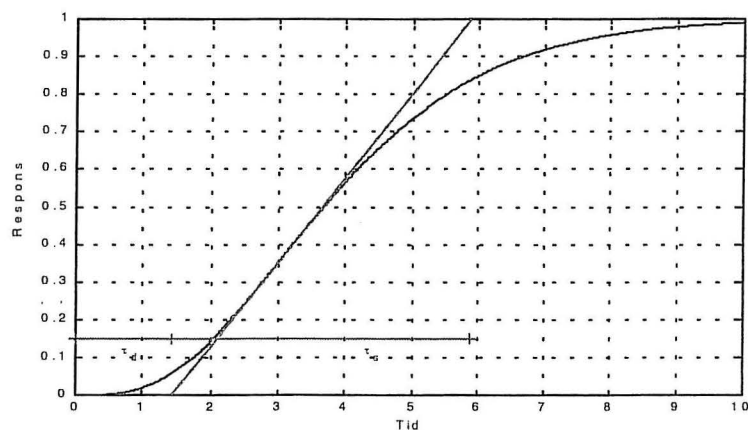
$$\Delta y\left(\frac{t}{\tau}\right) = 1 - e^{-\frac{t}{\tau}} \left( \sum_{j=1}^n \frac{1}{(j-1)!} \left(\frac{t}{\tau}\right)^{j-1} \right) \quad (5.3.2 - 2)$$

der kan afbildes som vist nedenstående



Figur 5.3.2-1. Enhedsrespons for system med  $n$  ens tidskonstanter.

Det er karakteristisk, at responsen for  $n \geq 2$  har en typiske s-form med vendetangent. Indlægges vendetangenten vil dennes skæring med hhv. tidsaksen og asymptoten inddele tidsaksen i to karakteristiske tider:  $\tau_d$  **dødtiden**, hvor reaktionen er meget træg, og  $\tau_s$  **stigetiden**, hvor den største del af responsens ændring foregår. Se figur 5.3.2-2.



Figur 5.3.2-2. Bestemmelse af dødtid og stigetid.

Når der er  $n$  ens tidskonstanter, vil vendetangenten forekomme til tiden  $t_v = (n-1)\tau$ , idet der af (5.3.2-2) fås

$$\Delta y' \left( \frac{t}{\tau} \right) = \frac{1}{(n-1)!} \left( \frac{t}{\tau} \right)^{n-1} e^{-\frac{t}{\tau}} \quad (5.3.2-3)$$

$$\Delta y'' \left( \frac{t}{\tau} \right) = \frac{1}{(n-1)!} \left[ (n-1) \left( \frac{t}{\tau} \right)^{n-2} - \left( \frac{t}{\tau} \right)^{n-1} \right] e^{-\frac{t}{\tau}} \quad \text{for } n \geq 2 \quad (5.3.2-4)$$

På grundlag af ovenstående kan der opstilles følgende sammenhæng mellem dødtid, stigetid og tidskonstant:



	$n$	$\frac{\tau_d}{\tau_s}$	$\frac{\tau_s}{\tau_d}$	$\frac{\tau_s}{\tau}$	$\frac{\tau_d}{\tau}$	$\frac{\tau_1}{\tau}$	$\frac{\tau_2}{\tau}$
n ens tidskonstanter	2	0.104	9.65	2.718	0.282		
	3	0.218	4.59	3.695	0.805		
	4	0.319	3.13	4.463	1.425		
	5	0.410	2.44	5.119	2.100		
	6	0.493	2.03	5.669	2.811		
	7	0.571	1.75	6.229	3.549		
	8	0.641	1.56	6.711	4.307		
	9	0.709	1.41	7.164	5.081		
	10	0.775	1.29	7.590	5.869		
3 forskellige tidskonstanter	3	0.200	5	3.02	0.60	0.44	1
	3	0.167	6	2.78	0.46	0.20	1
	3	0.143	7	2.74	0.39	0.11	1
	3	0.200	5	2.35	0.47	0.5	0.42
	3	0.167	6	2.05	0.34	0.5	0.18

Tabel 5.3.2-1.

Når systemet har ens tidskonstanter, vil forholdet mellem dødtid og stigetid således på entydig måde angive hvilken orden overføringsfunktionen har, og ud fra det angivne eksempel for et system med tre forskellige tidskonstanter ses, at forholdet mellem  $\tau_d/\tau_s$  ligger mellem det tilsvarende forhold for et system med hhv. to og tre ens tidskonstanter, hvorfor dette forhold også kan anvendes til en overslagsmæssig bestemmelse af et ækvivalent system med ens tidskonstanter.

Hvis man tænker sig et reguleringssystem hvor åbensløjfefunktionen netop har  $n$  ens tidskonstanter, når der ses bort fra styringsudstyrets overføringsfunktion, er det forholdsvis enkelt at bestemme dette systems stabilitetsgrænse ved forskellige styringsformer, og dermed altså de parametre der skal indstilles på styringsudstyret for netop at gøre systemet stabilt. Kombineres dette med en af de tidligere omtalte optimeringskriterier kan der således opstilles enkle regler for indstilling af regulatorens parametre, og gives disse regler som funktion af fx forholdet mellem dødtid og stigetid for den åbne sløjfe (uden reguleringssystemets overføringsfunktion indgående) vil reglerne med nogen tilnærmelse for vilkårlige systemer, der har samme forhold mellem dødtid og stigetid.

**Eksempel 5.3.2-1.** Bestem grænseværdien for sløjfeforstærkningen  $K_o$  i et reguleringssystem, der har en åbensløjfefunktion med  $n$  ens tidskonstanter, når systemet forsynes med P-styring.

**Løsning.** Systemets åbensløjfefunktion er bestemt ved

$$G(s) = K_k \frac{K}{(1 + \tau s)^n} = \frac{K_o}{(1 + \tau s)^n}$$

hvor  $K_o$  er sløjfeforstærkningen.

Åbensløjffens frekvenskarakteristik er da

$$G(i\omega) = K_o \frac{1}{(M_1 e^{i\varphi_1})^n} = \frac{K_o}{M_1^n} e^{-in\varphi_1}$$

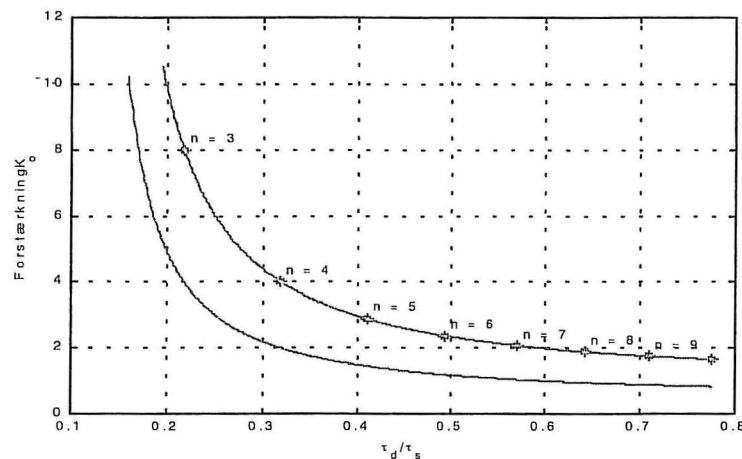
hvor

$$M_1 = \sqrt{1 + (\omega\tau)^2} \quad \text{og} \quad \varphi_1 = \arctg(\omega\tau)$$

Stabilitetsgrænsen er bestemt ved

$$\arctg(\omega\tau) = -\frac{\pi}{n} \quad \text{og} \quad K_o = M_1^n = (\sqrt{1 + (\omega\tau)^2})^n$$

Afbildes sløjfeforstærkningen som funktion af  $\tau_d/\tau_s$  (tabel 5.3.2-1) fås følgende stabilitetsdiagram for reguleringssystemet med P-styring



**Figur 5.3.2-3. Kritisk sløjfeforstærkning (stabilitetsgrænse) ved P-styring.**

Da reguleringssystemer med åbensløjffunktioner af 2. orden ikke kan blive ustabile, stiger den kritiske sløjfeforstærkning meget kraftigt når  $\tau_d/\tau_s \rightarrow 0,104$  ( $n = 2$ ). I figur 5.3.2-3 er endvidere indtegnet kurven for  $K_o = 0,5K_{okrit}$ , der ofte vil være den værdi af sløjfeforstærkningen der tilstræbes.

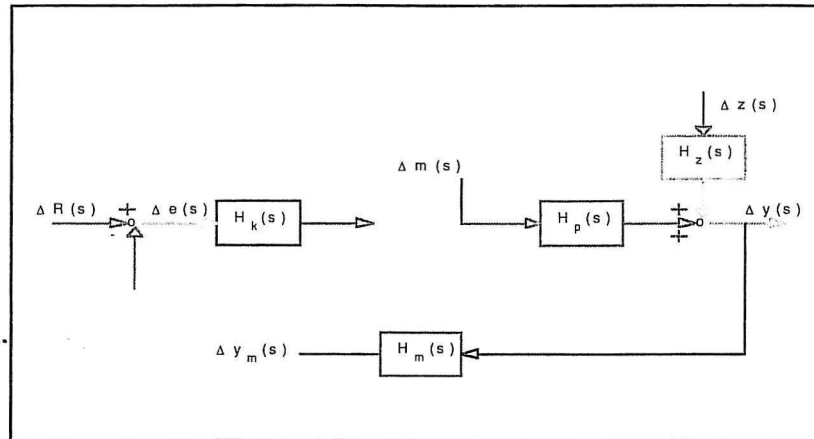
Af figuren ses at hvis forholdet mellem dødtid og stigetid er større end ca. 0,2 svarende til  $n = 3$ , er P-styring i praksis ikke velegnet, idet der vil komme en blivende afvigelse, der er større end 20% af afvigelsen uden regulering.

...

### 5.3.3 Impiriske regler for indstilling af regulatorparametre

Med udgangspunkt i de overvejelser der er skitseret i afsnit 5.3.2, er der opstillet to metoder til bestemmelse af indstillingsværdier for styringsudstyret i reguleringssystemer, der er i drift.

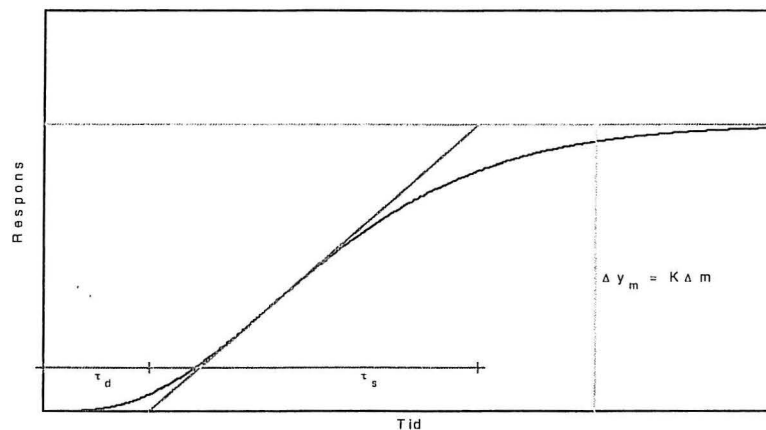
Den første metode, *springresponsmetoden*, går ud på at bestemme dynamikken i den åbne sløjfe, se figur 5.3.3-1.



**Figur 5.3.3-1.** Bestemmelse af den åbne sløjfes springrespons.

Med frakoblet regulering gives den styrbare størrelse en springvis ændring  $\Delta m$ , og forløbet samt den endelige ændring af den regulerede størrelse  $\Delta y_m$  registreres med reguleringssystemets føler og måleudstyr.

Springresponsen kan da have følgende udseende



**Figur 5.3.3-2.** Den åbne sløjfes springrespons.

Den samlede statiske forstærkning for de indgående komponenter kan beregnes af  $K = \Delta y_m / \Delta m$  og reguleringssystemets sløjfeforstærkning er  $K_o = K_k K$ .

Regulatorparametrene kan beregnes efter nedenstående regler

$$\text{P-styring} \quad K_o \leq f \tau_s / \tau_d \quad f = 0.7 - 1.0$$

$$\begin{aligned} \text{PI-styring} \quad K_o &\leq 0.7 \tau_s / \tau_d \\ \tau_I &\geq 3.5 \tau_d \end{aligned} \quad (5.3.3 - 1)$$

$$\begin{aligned} \text{PID-styring} \quad K_o &\leq 1.1 \tau_s / \tau_d \\ \tau_I &\geq 2.5 \tau_d \quad \text{og} \quad \tau_D \leq 0.5 \tau_d \end{aligned}$$

En alternativ metode til beregning af indstillingsværdier er *lukketsløjfe- eller Ziegler-Nichols metode*. Ved denne metode er reguleringen indkoblet og styringsudstyret indstillet til P-

styring. Styringsudstyrets forstærkning  $K_k$  øges gradvist, indtil den regulerede størrelse netop svinger med konstant amplitude efter en tilfældig eller fremprovokeret påvirkning (se fx figur 5.2.1-4). Den indstillede *kritiske regulatorforstærkning*  $K_{k,krit}$  aflæses og den regulerede størrelses svingningstid  $\tau_{krit}$  bestemmes. Den frekvens, de udæmpede svingninger i den regulerede størrelse har, svarer til den tidligere omtalte Nyquist-frekvens  $\omega_N$ , hvor både åbensløjfefunktionen  $G(s)$  og den specielle lukketsløjfefunktion  $H_{OG}(s)$  har en faseforskydning på  $-180^\circ$  (se figur 5.1.2-4 og 5.2.1-3).

Reguleringsparametrene kan derefter indstilles efter følgende regler

$$\begin{aligned}
 \text{P - styring} \quad & K_k \leq 0.5K_{k,krit} \\
 \text{PI - styring} \quad & K_k \leq 0.45K_{k,krit} \\
 & \tau_I \geq 0.85\tau_{krit} \\
 \text{PID - styring} \quad & K_k \leq 0.60K_{k,krit} \\
 & \tau_I \geq 0.5\tau_{krit} \quad \text{og} \quad \tau_D \leq 0.12\tau_{krit}
 \end{aligned} \tag{5.3.3 - 2}$$

Ved begge metoder må der tages hensyn til, at reguleringsobjektets dynamiske egenskaber kan variere med driftspunktet, hvis systemet har stærkt ulineære karakteristikker.

Indstillingsværdierne i (5.3.3-1 og -2) fremgår af DS 468 "Dansk Ingeniørforenings norm for automatiske reguleringsystemer til VVS-tekniske anlæg".

## 5.4 Opbygning af reguleringsystemer

I forhold til anden procesregulering byder regulering af klimatekniske anlæg på en del specielle problemer. Først og fremmest gælder dette de meget store ændringer i forstyrrelserne, der påvirker den regulerede størrelse. Både årlige og daglige belastningsændringer kan have en sådan størrelse, at manøvreorganet skal gennemløbe hele sit arbejdsområde. Hertil kan yderligere komme strukturændringer i reguleringskredsen, fx forårsaget af "omskiftning" mellem varme- og køle drift eller ændring af luftmængde fra 1/1 til 1/2 drift.

På grund af de store ændringer i belastningerne, men også af energiøkonomiske grunde, opdeles reguleringsområdet ofte på forskellige manøvreorganer (fx varmeventil – spjæld – køleventil). Som ved anden procesregulering er også de fleste overføringsfunktioner ikke-lineære, men ved den klimatekniske regulering er indflydelsen særlig mærkbar på grund af de store ændringer i arbejds punkt. Her kan ikke lineariseres omkring ét arbejds punkt, men der må tages hensyn til parameterændringen i hele lastområdet.

Dette betyder almindeligvis, at regulatoren indstilles meget forsigtigt, således at stabilitet også opnås i de ugunstigste tilfælde. Udtrykt på en anden måde betyder det, at reguleringen ikke er bedst mulig i alle arbejds punkter med deraf følgende forringet komfort og mulighed for forøget energiforbrug.

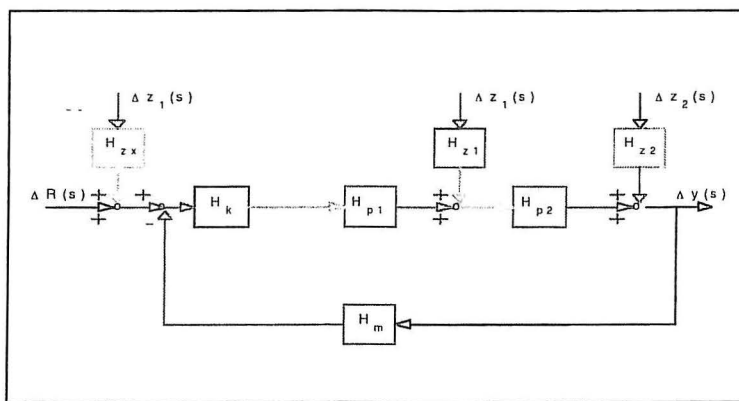
For at imødegå sådanne forhold er det naturligvis vigtigt, at de enkelte dele i reguleringskredsen dimensioneres også ud fra et reguleringsmæssigt synspunkt, fx at ventil og varme- eller køleflade dimensioneres som en helhed, der er bedst muligt lineariseret. Men der er også mulighed for at udbygge den enkelte reguleringsløjfe, så en del af disse uheldige forhold afhjælpes.

Dette sker ofte ved at have flere reguleringskredse på samme proces, enten i form af isolerede sløjfer, der uden videre kan betragtes hver for sig, eller i form af sløjfer, der på forskellig måde griber ind i hinanden. Hertil kommer muligheden for at indbygge forskellige

styringer af referenceværdien, dels med sigte på at modvirke belastningsvariationernes indvirken, og dels af energiøkonomiske grunde. Da mulighederne for sådanne koblinger er utallige, skal der ikke her gøres noget forsøg på en generel behandling af emnet, men der skal dog omtales nogle koblinger, der er meget anvendt.

#### 5.4.1 Kobling til modvirkning af forstyrrelser

I figur 5.4.1-1 er vist en reguleringssløjfe hvori der virker flere forstyrrelser (der ses i første omgang bort fra grenen med overføringsfunktionen  $H_{zx}(s)$ ). Hvis fx  $z_1$  er en kraftigt virkende forstyrrelse og denne kan måles, i klimatekniske systemer kunne det fx være udetemperaturen, kan indvirkningen af  $z_1$  modvirkes ved at føre den gennem overføringsfunktionen  $H_{zx}(s)$  til at give en referenceændring.



**Figur 5.4.1-1.** Kobling til modvirkning af forstyrrelse.

Forstyrrelsens  $z_1$ 's indvirken på den regulerede størrelse bliver nu

$$\Delta y = \frac{H_{p2}(s)}{1 + G(s)} (H_{z1}(s) + H_{zx}(s)H_k(s)H_{p1}(s))\Delta z_1(s) \quad (5.4.1 - 1)$$

hvor  $G(s)$  er åbensløjfefunktionen.

Hvis man kan udforme overføringsfunktionen  $H_{zx}(s)$  således, at den netop har formen  $H_{zx}(s) = -H_{z1}(s)/H_k(s)H_{p1}(s)$ , vil forstyrrelsen således fuldstændigt blive udkompenseret. I praksis er dette næppe muligt, men princippet anvendes i stor udstrækning i modificeret form, idet man lader forstyrrelsen styre referenceværdien efter et forud bestemt sammenhæng.

Typiske eksempler fra klimateknikken er at styre referencen for indblæsningstemperaturen efter udetemperaturen i et kanaltemperaturreguleringsystem eller den såkaldte *vejrkompensering* til varmeanlæg med radiatorer. Her styres referencen til fremløbstemperaturen efter måling af udetemperaturen og reguleringssløjfen fastholder så fremløbstemperaturen efter blandeventilen. Dette letter således slutreguleringen af radiatorernes varmeafgivelse, der kan ske gennem anvendelse af en simpel termostatisk radiatorventil uden store krav til hurtighed eller forstærkning.

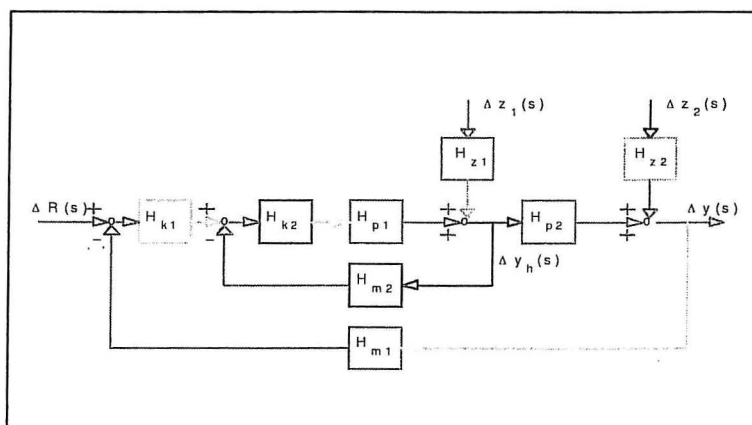
### 5.4.2 Forregulering af forstyrrelser – kaskaderegulering

I en del tilfælde er det ikke alene muligt at måle forstyrrelsen, men også at øve indflydelse på den, inden den slår igennem i hovedreguleringsløjfen. Der er her tale om systemer der opbygges af adskilte reguleringskredse. Som eksempel kan nævnes muligheden for trykdifferensregulering i en vandkreds inden et shuntarrangement, der indgår i en anden reguleringskreds. Denne forregulering behøver således ikke at være særlig nøjagtig.

Vendes tilbage til figur 5.4.1-1 ses at forstyrrelsernes indvirken på den regulerede størrelse kan udtrykkes ved

$$\Delta y(s) = \frac{H_{z1}(s)H_{p2}(s)}{1+G(s)}\Delta z_1(s) + \frac{H_{z2}(s)}{1+G(s)}\Delta z_2(s) \quad (5.4.2 - 1)$$

Hvis systemet er dimensioneret med størst mulig forstærkning i åbensløjfefunktionen  $G(s)$  og specielt hvis den største forstærkning lægges i styringsudstyret  $H_k(s)$ , vil reguleringssystemet modvirke forstyrrelsens indvirken bedre, jo nærmere forstyrrelsens "angrebepunkt" er ved den regulerede størrelse. Hvis  $z_1$  er en kraftigt virkende forstyrrelse, kan dette forhold udnyttes ved en *kaskaderegulering* som vist på figur 5.4.2-1.



Figur 5.4.2-1. Kaskadekoblede reguleringsystemer.

Forstyrrelser, der som  $z_1$  virker ind på den indre kreds, modvirkes af regulatoren  $H_{k2}$  inden de slår igennem til den regulerede størrelse  $y$ . Der er indført en hjælpestørrelse  $y_h$  som reguleret størrelse i den indre kreds, og referencen til regulatoren  $H_{k2}$  styres af regulatoren  $H_{k1}$ .

Den indre sløjfes virkning kan udtrykkes ved

$$\Delta y_h(s) = \frac{H_{z1}(s)}{1+G_2(s)}\Delta z_1(s) + \frac{H_{k2}(s)H_{p1}(s)}{1+G_2(s)}\Delta R_2(s) \quad (5.4.2 - 2)$$

hvor  $G_2(s)$  er den indre sløjfes åbensløjfefunktion og  $\Delta R_2(s)$  er den indre sløjfes reference.

Udtrykkes dette kort gennem lukketsløjfefunktionerne  $H_{o2z}(s)$  og  $H_{o2R}(s)$  kan det samlede systems lukketsløjfefunktion for forstyrrelsernes påvirkningen opstilles som

$$\Delta y(s) = \frac{H_{o2z}(s)H_{p2}(s)}{1 + G(s)} \Delta z_1(s) + \frac{H_{p2}(s)}{1 + G(s)} \Delta z_2(s) \quad (5.4.2 - 3)$$

hvor systemets åbensløjfefunktion  $G(s)$  er

$$G(s) = H_{k1}(s)H_{o2R}(s)H_{p2}(s)H_{m1}(s) \quad (5.4.2 - 4)$$

Da den indre sløjfe indeholder "mindre dynamik" end den ydre kreds, kan sløjfeforstærkningen i  $G_2(s)$  vælges så stor, at forstyrrelsen  $z_1$  i stor udstrækning er udreguleret og således kun giver ringe påvirkning på den ydre sløjfe. Samtidig opnås at den indre sløjfe forbedrer stabilitetsforholdene for den ydre sløjfe, ligesom ulinearitet inden for den indre sløjfe udglattes.

Dette princip anvendes ofte inden for ventilationsteknikken i forbindelse med rumtemperaturregulering. I den indre sløjfe reguleres varme-/kølefladen efter kanaltemperaturen (indblæsnings-temperaturen), der således er hjælpestørrelsen  $y_h$ . Rumtemperaturen ( $y$ ) registreres af måle-udstyret  $H_{m1}$  og styrer gennem regulatoren  $H_{k1}$  referencen til indblæsningstemperaturkredsen. Overføringsfunktionen  $H_{p2}(s)$  vil i dette tilfælde repræsentere dynamikken i rummet og  $z_2$  de forstyrrelser der virker ind på rummet (interne varmebelastninger og belastninger fra udeklima). Dette system giver samtidig en nem mulighed for minimumsbegrænsning af indblæsningstemperaturen ( $y_h$ ), idet referenceudstyret i regulatoren  $H_{k2}$  blot skal forsynes med en minimumsindstilling. Hvis forholdene i den ydre kreds er sådan, at der fordres en indblæsningstemperatur lavere end den minimale, vil den indre kreds blot forsøge at fastholde den indstillede minimumsværdi.

Kaskadereguleringssystemer af denne art går ofte under betegnelsen: reguleringssystemer med P+PI eller PI+PI-styring alt efter styringsformen i hhv. ydre- og indre kreds. Det skal bemærkes, at selv om der ikke kommer nogen stationær belastningsafvigelse fra forstyrrelsen  $z_1$  på grund af PI-styringen i den indre kreds, vil der forekomme en stationær belastningsafvigelse fra forstyrrelsen  $z_2$ , hvis der er P-styring i den ydre kreds.

Det burde være overflødigt at nævne, at indstillingen af regulatorparametrene skal være sådan, at begge reguleringskredse er stabile.

### 5.4.3 Sammenfatning

Langt de fleste systemer inden for energiteknikken kan reguleres ved anvendelse af regulatorer med P-, PI- eller PID-styring. Når der ses bort fra simple selvvirkende regulatorer (termostatiske radiatorventiler o.l. der altid har P-styring) er der altid indbygget valgmulighed mellem de forskellige styringsformer, således at det ikke er et økonomisk spørgsmål, hvilken styringsform der skal vælges, men at dette afgøres af de dynamiske egenskaber i den proces eller det anlæg der skal reguleres. Regulatorens parametre skal indstilles således, at reguleringskredsen er stabil over hele dets arbejdsområde og således at man får størst mulig udbytte af de enkelte regulatorparametres virkning.

En forøgelse af *sløjfeforstærkningen* gør systemet hurtigere og mindsker de stationære belastningsafvigelser men samtidig forringes stabiliteten.

Integrationsvirkning i styringsudstyret eliminerer i princippet helt de stationære belastningsafvigelser, men dette tager en vis tid, afhængig af den indstillede *integrationstid* og systemets dynamik. Jo hurtigere systemet reagerer, des kortere bør integrationstiden være, men dette giver samtidig mulighed for svingninger i kredsen, der i værste fald kan gøre systemet ustabil. En for lang integrationstid giver også en lang tid inden forstyrrelserne udreguleres.

Differentiationsvirkning i styringsudstyret har derimod ingen indflydelse på de stationære belastningsafvigelser men den modvirker svingningstendenser og gør systemet hurtigere,

idet D-virkningen reagerer på ændringer i fejlen og dermed forbedres stabiliteten. Indstilling af *differentiationstiden* skal afpasses efter systemets dynamik, idet en hurtigt reagerende sløjfe kun kan tåle en lille differentiationstid, hvis der ikke skal opstå svingninger.

Generelt bør dødtider og specielt transportforsinkelser gøres så små som muligt, idet tidsforsinkelser altid virker i ugunstig retning for systemets stabilitet.

Alle elementer i reguleringssløjfen bør have så lineære karakteristikker som muligt, således at de indgående komponenter har samme dynamiske egenskaber i alle driftspunkter. Dette sikrer den bedst mulige stabilitet i hele arbejdsområdet.

Sluttelig skal det påpeges, at selv ikke et nok så avanceret reguleringsudstyr kan redde et dårligt dimensioneret anlæg.



# Appendiks

MATLAB m-filer

Komplekse tal

## A1 MATLAB m-filer

I det følgende gives en beskrivelse af de hyppigst anvendte MATLAB beregningsprocedurer der er anvendt i forbindelse med nærværende undervisningsmateriale. Beskrivelserne er direkte kopieret fra MATLAB's help-funktion.

### A1.1 Partialbrøkd udvikling

**CONV** Convolution and polynomial multiplication.  
 $C = \text{CONV}(A, B)$  convolves vectors A and B. The resulting vector is length  $\text{LENGTH}(A) + \text{LENGTH}(B) - 1$ .  
 If A and B are vectors of polynomial coefficients, convolving them is equivalent to multiplying the two polynomials.  
 See also **XCORR**, **DECONV**, and **CONV2**.

**RESIDUE** Partial-fraction expansion or residue computation.  
 $[R,P,K] = \text{RESIDUE}(B,A)$  finds the residues, poles and direct term of a partial-fraction expansion of the ratio of two polynomials B and A

$$\frac{B(s)}{A(s)} = \frac{r(1)}{s-p(1)} + \frac{r(2)}{s-p(2)} + \dots + \frac{r(n)}{s-p(n)} + k(s)$$

Vectors B and A specify the coefficients of the polynomials in descending powers of s. The residues are returned in column vector R, the pole locations in column vector P, and the direct terms in row vector K.

$[B,A] = \text{RESIDUE}(R,P,K)$  converts the partial-fraction expansion back to the B/A form.

## A1.2 Omsætning mellem overføringsfunktion og tilstandsbeskrivelse

### TF2SS

Transfer function to state-space conversion.

$[A,B,C,D] = \text{TF2SS}(\text{NUM},\text{DEN})$  calculates the state-space representation:

$$\begin{aligned}\dot{x} &= Ax + Bu \\ y &= Cx + Du\end{aligned}$$

of the system:

$$H(s) = \frac{\text{NUM}(s)}{\text{DEN}(s)}$$

from a single input. Vector DEN must contain the coefficients of the denominator in descending powers of s. Matrix NUM must contain the numerator coefficients with as many rows as there are outputs y. The A,B,C,D matrices are returned in controller canonical form. This calculation also works for discrete systems but the numerator must be padded with trailing zeros to make it the same length as the denominator.

### SS2TF

State-space to transfer function conversion.

$[\text{NUM},\text{DEN}] = \text{SS2TF}(A,B,C,D,iu)$  calculates the transfer function:

$$H(s) = \frac{\text{NUM}(s)}{\text{DEN}(s)} = C(sI-A)^{-1}B + D$$

of the system:

$$\begin{aligned}\dot{x} &= Ax + Bu \\ y &= Cx + Du\end{aligned}$$

from the iu'th input. Vector DEN contains the coefficients of the denominator in descending powers of s. The numerator coefficients are returned in matrix NUM with as many rows as there are outputs y.

## A1.3 Simulering

### STEP

Step response of continuous-time linear systems.

$Y = \text{STEP}(A,B,C,D,iu,T)$  calculates the response of the system:

$$\begin{aligned}\dot{x} &= Ax + Bu \\ y &= Cx + Du\end{aligned}$$

to a step applied to the iu'th input. Vector T must be a regularly spaced time vector that specifies the time axis for the step response. STEP returns a matrix Y with as many columns as there are outputs y, and with LENGTH(T) rows.  $[Y,X] = \text{STEP}(A,B,C,D,iu,T)$  also returns the state time history.

$Y = \text{STEP}(\text{NUM}, \text{DEN}, T)$  calculates the step response from the transfer function description  $G(s) = \text{NUM}(s)/\text{DEN}(s)$  where NUM and DEN contain the polynomial coefficients in descending powers.

### LSIM

Simulation of continuous-time linear systems to arbitrary inputs.  
 $Y = \text{LSIM}(A, B, C, D, U, T)$  calculates the time response of the system:

$$\begin{aligned}\dot{x} &= Ax + Bu \\ y &= Cx + Du\end{aligned}$$

to input time history U. Matrix U must have as many columns as there are inputs, U. Each row of U corresponds to a new time point, and U must have LENGTH(T) rows. LSIM returns a matrix Y with as many columns as there are outputs y, and with LENGTH(T) rows.

$[Y, X] = \text{LSIM}(A, B, C, D, U, T)$  also returns the state time history.

$\text{LSIM}(A, B, C, D, U, T, X0)$  can be used if initial conditions exist.

$Y = \text{LSIM}(\text{NUM}, \text{DEN}, U, T)$  calculates the time response from the transfer function description  $G(s) = \text{NUM}(s)/\text{DEN}(s)$  where NUM and DEN contain the polynomial coefficients in descending powers.

## A1.4 Frekvensanalyse

### BODE

Bode response of continuous-time linear systems.

$[\text{MAG}, \text{PHASE}] = \text{BODE}(A, B, C, D, iu, W)$  calculates the frequency response of the system:

$$\begin{aligned}\dot{x} &= Ax + Bu \\ y &= Cx + Du\end{aligned} \qquad G(s) = C(sI - A)^{-1} B + D$$

$$\text{mag}(w) = \text{abs}(G(jw)), \quad \text{phase}(w) = \text{angle}(G(jw))$$

from the iu'th input. Vector W must contain the frequencies, in radians, at which the Bode response is to be evaluated. BODE returns matrices MAG and PHASE (in degrees) with as many columns as there are outputs y, and with LENGTH(W) rows.

$[\text{MAG}, \text{PHASE}] = \text{BODE}(\text{NUM}, \text{DEN}, W)$  calculates the Bode response from the transfer function description  $G(s) = \text{NUM}(s)/\text{DEN}(s)$  where NUM and DEN contain the polynomial coefficients in descending powers.

See LOGSPACE to generate frequency vectors that are equally spaced logarithmically in frequency.

### LOGSPACE

Generate logarithmically spaced vector. LOGSPACE(d1, d2) generates a vector of 50 points logarithmically equally spaced between decades  $10^{d1}$  and  $10^{d2}$ . If d2 is pi, then the points are

between  $10^{d1}$  and  $\pi$ . LOGSPACE(d1, d2, N) generates N points. See also Linspace and  $\therefore$ .

**FIXPHASE** Unwrap phase plots so that instead of going from -180 to 180 they will have a smooth transition across these branch cuts into phases greater than 180 or less than -180.  
 $Y = \text{FIXPHASE}(X)$  fixes the phases in X. If X is an array of phases from several variables, the phase for each variable must lie in a separate column. The phase must be in degrees.

## A2 Komplekse tal

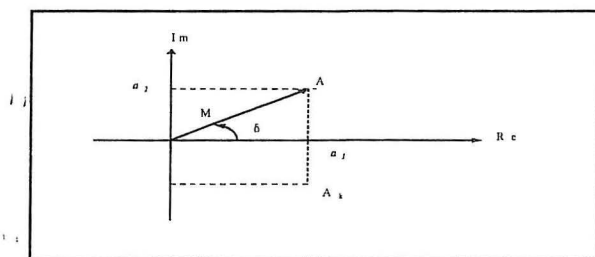
Her gives en kort genopfriskning af de vigtigste begreber i forbindelse med komplekse tal og funktioner af komplekse variable.

### A2.1 Det komplekse tals repræsentation

Et komplekst tal  $A$  angives ved dets realdel  $a_1$  og dets imaginærdel  $a_2$  ved skrivemåden

$$A = a_1 + ia_2 \quad \text{hvor } i \text{ er den imaginære enhed } i = \sqrt{-1} \quad (\text{A2.1-1})$$

Real- og imaginærdelen angiver de retvinklede koordinaterne til  $A$  i den komplekse talplan



Figur A2.1-1. Den komplekse plan.

Det komplekse tal  $A$  kan også angives i polære koordinater ved længden  $M$  og vinklen  $\delta$  ved følgende symbolske skrivemåde

$$A = Me^{i\delta} \quad (\text{A2.1-2})$$

hvor

$$M = |A| = \sqrt{a_1^2 + a_2^2} \quad \text{Modulus til } A \quad (\text{A2.1-3})$$

$$\delta = \arctg\left(\frac{a_2}{a_1}\right) \quad \text{Argumentet til } A \quad (\text{A2.1-4})$$

De almindelige regler for regning med eksponentialfunktioner kan herved anvendes i forbindelse med komplekse tal.

Spejles det komplekse tal  $A$  om den reelle akse fremkommer det konjugerede komplekse tal  $A_k$ , der kan angives på følgende måde

$$A_k = a_1 - ia_2 = Me^{-i\delta} \quad (\text{A2.1-5})$$

Dette par af komplekse tal har således samme modulus og numerisk samme argument.

Ved anvendelse af figur A2.1-1 fås

$$a_1 = M \cos(\delta) \quad \text{og} \quad a_2 = M \sin(\delta) \quad (\text{A2.1-6})$$

og ved anvendelse af (A2.1-1, -2 og -5) fås

$$A = Me^{i\delta} = M(\cos(\delta) + i \sin(\delta)) \quad (\text{A2.1-7})$$

$$A_k = Me^{-i\delta} = M(\cos(\delta) - i \sin(\delta)) \quad (\text{A2.1-8})$$

hvoraf Euler-formlerne fremkommer

$$e^{i\delta} = \cos(\delta) + i \sin(\delta) \quad (\text{A2.1-9})$$

$$e^{-i\delta} = \cos(\delta) - i \sin(\delta) \quad (\text{A2.1-10})$$

eller

$$\cos(\delta) = \frac{1}{2}(e^{i\delta} + e^{-i\delta}) \quad (\text{A2.1-11})$$

$$\sin(\delta) = \frac{1}{2i}(e^{i\delta} - e^{-i\delta}) \quad (\text{A2.1-11})$$

## A2.2 Polynomier med komplekse rødder

I et polynomium af formen

$$P(x) = \sum_{m=0}^n p_m x^m \quad \text{for } n \geq 2 \quad (\text{A2.2-1})$$

indsættes en kompleks funktionsværdi  $x = r = a_1 + ia_2 = M \exp(i\delta)$  hvilket giver

$$P(r) = \sum_{m=0}^n p_m (Me^{i\delta})^m = \sum_{m=0}^n (p_m M^m) e^{im\delta} = \sum_{m=0}^n (q_{1m} + iq_{2m}) = q_1 + iq_2 \quad (\text{A2.2-2})$$

Hvis  $q_1 = q_2 = 0$  er  $x = r$  rod i ligningen  $P(x) = 0$ .

Indsættes tilsvarende den konjugerede til  $r$ , altså  $x = r_k = a_1 - ia_2 = M \exp(-i\delta)$  fås

$$P(r_k) = \sum_{m=0}^n p_m (Me^{-i\delta})^m = \sum_{m=0}^n (p_m M^m) e^{-im\delta} = \sum_{m=0}^n (q_{1m} - iq_{2m}) = q_1 - iq_2 \quad (\text{A2.2-2})$$

Det ses heraf at polynomiets funktionsværdi er den konjugerede til (A2.2-1) og hvis  $x = r$  er rod i ligningen  $P(x) = 0$ , så er  $x = r_k$  også rod.







# Redning og udvikling



ISSN 1395-8232 U9809

Instituttet for Bygningsteknik

Aalborg Universitet, November 1998

Sohngaardsholmsvej 57, 9000 Aalborg

Tlf.: 9635 8080 Fax: 9814 8243

<http://iee.civil.auc.dk>